Limites de fonctions

I Limite d'une fonction à l'infinie et Asymptote

Rappel: Intuitivement

- On dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$ si $f(x)$ est aussi proche de L que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.
- On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

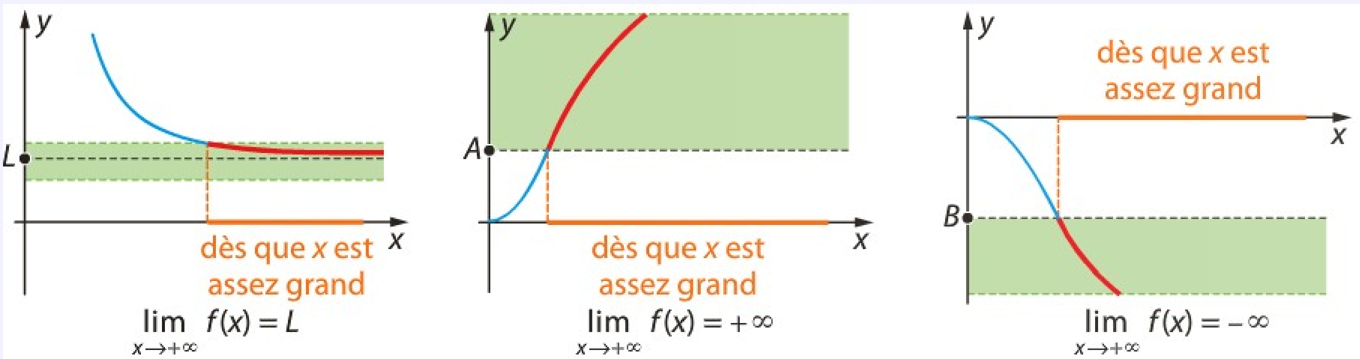
Définition: Limite en l'infini

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \mathrm{L}$ si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez grand
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si tout intervalle $]\mathrm{A}\,;\,+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez grand
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ si tout intervalle $]-\infty\,;\,\mathrm{B}[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez grand

Remarque :

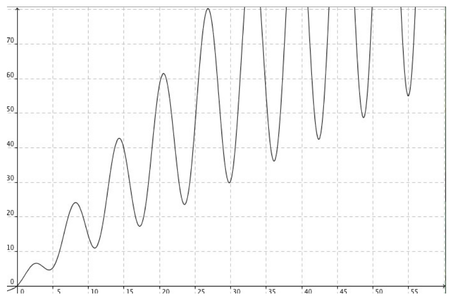
- Ces définitions sont analogues à celles données pour les limites de suites, "dès que x est assez grand" a remplacé "à partir d'un certain rang".
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \mathrm{L}$, on dit aussi que la limite de f est L lorsque x tend vers $+\infty$

Interprétation graphique

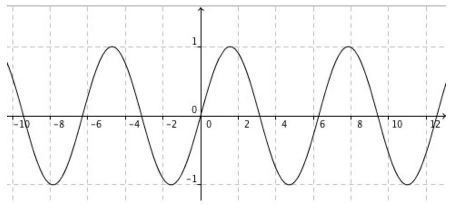


Remarque :

Une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante.



Il existe des fonctions qui ne possèdent pas de limite infinie. C'est le cas des fonctions sinusoïdales.



Limites des fonctions usuelles

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$
-
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

Définition: Asymptote horizontale

On dit que la droite d'équation $y = \mathrm{L}$ est une **asymptote horizontale** à la courbe en $+\infty$ lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \mathrm{L}$, et elle est asymptote à la courbe en $-\infty$ lorsque $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \mathrm{L}$.

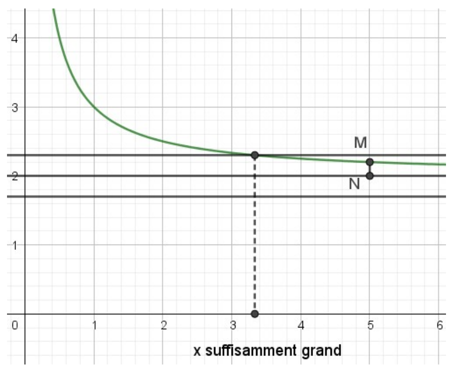
Exemple :

La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$par $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ a pour limite 2 lorsque x tend vers $+\infty$

En effet, les valeurs de la fonction se rapprochent de 2 dès que x est assez grand.

La distance $\mathrm{MN} = \frac{1}{x}$ tend vers zéro lorsque x tend vers $+\infty$.

Pour tout intervalle contenant 2, toutes les valeurs de f appartiennent à cet intervalle dès que x est assez grand



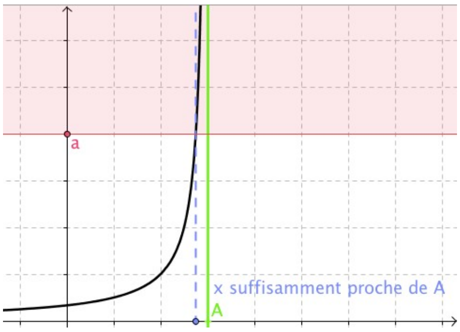
II Limite d'une fonction en un réel a

Rappel: Intuitivement

On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en a si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de a.

Exemple :

La fonction représentée ci-dessous a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers a.
En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment proche de a.
Si on prend un réel A quelconque, l'intervalle $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de la fonction dès que x est suffisamment proche de a.

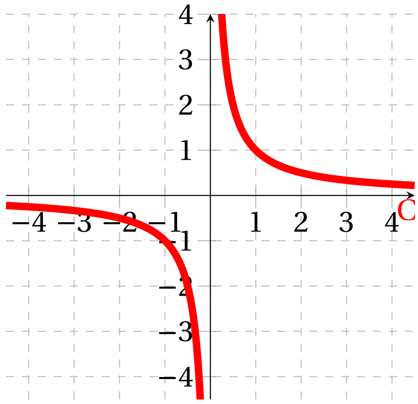


Définition: Limite en un réel a

Soit a un nombre réel et f une fonction définie sur $\mathbb{R}-\{a\}$.

- Dire que f admet une limite à gauche en a, signifie que lorsque x tend vers a par valeurs inférieures, f tend vers cette limite : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a,\ x<a} f(x) = L$ (L peut être aussi $\pm\infty$)
- Dire que f admet une limite à droite en a, signifie que lorsque x tend vers a par valeurs supérieures, f tend vers cette limite : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a,\ x>a} f(x) = L$ (L peut être aussi $\pm\infty$)
- Dire que f admet une limite en a, lorsque les limites à gauche et à droite sont égales.

Exemple : Etudions la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de zéro.



- Cas $x > 0$:
  Pour tout $\mathrm{M} > 0$, $\quad \dfrac{1}{x} > \mathrm{M} \quad \Leftrightarrow \quad x < \dfrac{1}{\mathrm{M}}$
  Ainsi pour tout nombre $\mathrm{M} > 0$, l'intervalle $]\mathrm{M}\ ;\ +\infty[$ contient tous les nombres $f(x)$ dès que $x \in \left]0\ ;\ \dfrac{1}{\mathrm{M}}\right[$.
  On note : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$
- Cas $x < 0$:
  Pour tout $\mathrm{M} < 0$, $\quad \dfrac{1}{x} < \mathrm{M} \quad \Leftrightarrow \quad x > \dfrac{1}{\mathrm{M}}$
  Ainsi pour tout nombre $\mathrm{M} < 0$, l'intervalle $]-\infty\ ;\ \mathrm{M}[$ contient tous les nombres $f(x)$ dès que $x \in \left]\dfrac{1}{\mathrm{M}}\ ;\ 0\right[$.
  On note : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

Attention : cette fonction n'a pas de limite en zéro car $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

Définition: Asymptote verticale

On dit que la droite d'équation $x = \mathrm{L}$ est une **asymptote verticale** à la courbe lorsque $\lim\limits_{x \to \mathrm{L}} f(x) = \pm\infty$

Exemple : Pour la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$; la droite $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe.

III Théorèmes généraux sur les limites

L et L$'$ sont des réels, α est un réel qui peut être remplacé par $+\infty$ ou $-\infty$

Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	L$'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} \left(f(x)+g(x)\right) =$	L + L$'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.$*$

Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	L > 0	L < 0	L > 0	L < 0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	L$'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ $ou -\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} \left(f(x)\,g(x)\right) =$	L × L$'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	L	L > 0 ou $+\infty$	L < 0 ou $-\infty$	L > 0 ou $+\infty$	L < 0 ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	L$' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 avec $g(x) > 0$	0 avec $g(x) > 0$	0 avec $g(x) < 0$	0 avec $g(x) < 0$	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$	$\dfrac{\text{L}}{\text{L}'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	L$' > 0$	L$' < 0$	L$' > 0$	L$' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Exemple : Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-5)(3+x^2)$

On sait que $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x-5 = -\infty \text{ et} \\ \text{et } \lim\limits_{x\to-\infty} 3+x^2 = +\infty\end{array}\right\}$ d'après la règle sur la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-5)\left(3+x^2\right) = +\infty$

Remarque : Comme pour les suites, on rappelle que les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture :

$$"\infty-\infty" \;,\quad "0\times\infty" \;,\quad "\frac{\infty}{\infty}" \quad et \quad "\frac{0}{0}"$$

Méthode : Lever une forme indéterminée sur les fonctions polynômes et rationnelles

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-3\ x^3 + 2x^2 - 6x + 1)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 + 2}{4x^2 - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x-3}{2-x}$

d) $\lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{\sqrt{x-1} - 3}{x-5}$

Après factorisation, conjugué. . . .

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-3\ x^3 + 2x^2 - 6x + 1\right) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 + 2}{4x^2 - 1} = \dfrac{3}{4}$

c) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x-3}{2-x} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x-1} - 3}{x-5} = +\infty$

IV Fonctions composées

Définition: Fonction composée

f est une fonction définie sur un intervalle J

et g une fonction définie sur un intervalle I tel que, pour tout réel x de I, $g(x)$appartient à J.

La fonction composée g suivie de f est la fonction $h$définie sur I par $h(x) = f(g(x))$

$$\begin{array}{lccccc} h: & \mathrm{I} & \to & \mathrm{J} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & g(x) & \to & f(g(x)) \end{array}$$

Remarque : On écrit $h = f \circ g$, on lit "f rond g".

Exemple : h est définie sur $]-\infty\ ;\ 1]$ par $h(x) = \sqrt{1-x}$

Pour calculer $h(x)$, on calcule d'abord $1-x$ puis la racine carrée de ce réel.

On définit $g\ : x \to 1-x$

puis $f : \mathrm{X} \to \sqrt{\mathrm{X}}$

Alors $h(x) = f(g(x))$

Donc

$$\begin{array}{lccccc} h: &]-\infty\ ;\ 1] & \to & [0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & 1-x & \to & \sqrt{1-x} \end{array}$$

Théorème: Théorème des limites d'une fonction composée

Soient a, b, c des réels ou $\pm\infty$

Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ et si $\lim\limits_{x\to b} v(x) = c$ alors $\lim\limits_{x\to a} v(u(x)) = c$

Exemple : h est définie sur $]-\infty\ ;\ 1]$ par $h(x) = \sqrt{1-x}$

On a $\lim\limits_{x\to -\infty} (1-x) = +\infty$

et $\lim\limits_{\mathrm{X}\to+\infty} \sqrt{\mathrm{X}} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x) = +\infty$

V Théorèmes de comparaison

Théorème: Théorème "des gendarmes"

f, $g$et h sont trois fonctions définies sur $\mathrm{I} =]\mathrm{A}\ ;\ +\infty[$ (ou $\mathrm{I} = \mathbb{R}$), l désigne un nombre réel.

Si, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si g et h ont la même limite l en $+\infty$

Alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$

Démonstration :

Par hypothèse, g et h ont la même limite l en l'infini.

Considérons un intervalle ouvert J contenant I,

- il contient tous les éléments $g(x)$ dès que $x > a$,
- il contient tous les éléments $h(x)$ dès que $x > b$.

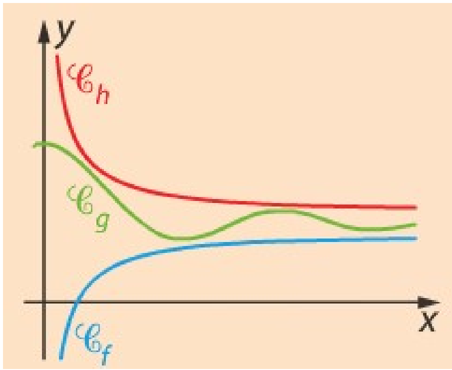
Notons c le plus grand des deux nombres a et b.

Alors J contient donc tous les éléments $g(x)$ et $h(x)$ dès que $x > c$.

Comme pour tout $x \in \mathrm{I}$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$,

On en déduit que J contient tous les éléments $f(x)$ dès que $x > c$.

Ceci est vrai pour tout intervalle ouvert contenant l donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$.



Théorème: Théorème de comparaison à l'infini

f et $g$sont deux fonctions définies sur $\mathrm{I} =]\mathrm{A}\ ;\ +\infty[$ (ou I=$\mathbb{R}$)

Si, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) \geq g(x)$ et si $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Si, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Remarque : Ce théorème s'adapte aux comparaisons en $-\infty$

Démonstration : Par hypothèse, tout intervalle de la forme $]\mathrm{M}\ ;\ +\infty[$ contient toutes les valeurs $g(x)$ dès que x est assez grand dans I.

Alors il contient aussi toutes les valeurs $f(x)$ car $f(x) \geq g(x)$ ainsi $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exemples :

Déterminer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sin x)$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\cos x}{x^2+1}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sin x)$

  Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ n'existe pas.

  Alors sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.

  Levons l'indétermination :

  Pour tout x, $-1\leq\sin x$ alors $x-1\leq x+\sin x$

  Or $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$

  D'après le théorème de comparaison $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sin x)=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\cos x}{x^2+1}$ Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ n'existe pas.

  Alors sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.

  Levons l'indétermination :

  Pour tout x, $-1\leq\cos x\leq 1$ alors $-x\leq x\cos x\leq x$ car $x>0$

  Comme $x^2+1>0$

  Alors $-\dfrac{x}{x^2+1}\leq\dfrac{x\cos x}{x^2+1}\leq\dfrac{x}{x^2+1}$

  Ou encore $-\dfrac{x}{x^2}\leq-\dfrac{x}{x^2+1}\leq\dfrac{x\cos x}{x^2+1}\leq\dfrac{x}{x^2+1}\leq\dfrac{x}{x^2}$

  $$-\frac{1}{x}\leq\frac{x\cos x}{x^2+1}\leq\frac{1}{x}$$

  Or $\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

  D'après le théorème de comparaison $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\cos x}{x^2+1}=0$

VI Limites liées à la fonction exponentielle

Limites

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Démonstration :

- Soit $f(x) = e^x - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

  Alors $f'(x) = e^x - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

  Comme $f'(0) = 0$

  et que la fonction $x \to e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

  alors sur R^- $e^x \leq 1$ $e^x - 1 \leq 0$ $f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante sur R^-

  sur R^+ $e^x \geq 1$ $e^x - 1 \geq 0$ $f'(x) \geq 0$ alors f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$

  De plus $f(0) = 1$, f admet un minimum en zéro qui vaut 1.

  Donc pour tout $x \in \mathrm{R}$, $f(x) \geq 1$, soit $f(x) > 0$ et donc $e^x > x$

  D'après le théorème de comparaison, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{e^x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Autres limites

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Démonstration :

- Soit f la fonction définie sur R^+ par $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$

  f est dérivable sur R^+ $f'(x) = e^x - x$

  f' est dérivable sur R^+ $f''(x) = e^x - 1$

  On a montré que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $e^x > 1$ donc $f''(x) \geq 0$ et f' est croissante sur R^+

  On dresse alors le tableau de variations :

x	0 $\quad$ $+\infty$
Signe de f''	$+$
Variations de f'	$1 \nearrow +\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$
Variation de f	$1 \nearrow +\infty$

De plus, $f'(0) = 1$, donc $f'(x) \geq 0$ et f est croissante sur $\mathbb{R}^+$

Or $f(0) = 1$ donc pour tout $x \in \mathrm{R}^+, f(x) \geq f(0) = 1 > 0$

Donc $e^x - \dfrac{x^2}{2} > 0$ soit $e^x > \dfrac{x^2}{2}$ et pour tout $x > 0$, $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$,

D'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$ soit $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

- $xe^x = \dfrac{x}{e^{-x}} = -\dfrac{-x}{e^{-x}}$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x}{e^{-x}} = 0$
  Alors $\lim\limits_{x \to -\infty} (-\dfrac{-x}{e^{-x}}) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

- On pose $f(x) = e^x$ alors $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^0}{x - 0} = f'(0) = 1$ (définition du nombre dérivé)

VII Limites liées à la fonction logarithme népérien

Propriété: Limites aux bornes de la fonction ln

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
2. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$

Démonstration :

1. Pour tout réel $\mathrm{A} > 0$, on a $\ln x > \mathrm{A} \iff x > e^{\mathrm{A}}$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.
2. Pour tout réel $x > 0$, on pose $y = \dfrac{1}{x}$. Ainsi $x = \dfrac{1}{y}$.

   On a

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \\ \lim\limits_{y \to +\infty} -\ln y = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} -\ln \frac{1}{x} = -\infty$$

   Or $\ln x = -\ln \dfrac{1}{x}$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$.

Propriété: Croissances comparées

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$ avec $n \in \mathbb{N}$
3. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x \ln x = 0$
4. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^n \ln x = 0$ avec $n \in \mathbb{N}$

Démonstration :

1. Pour tout $x > 0$, on pose $y = \ln x$. On dans ce cas $e^y = x$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \\ \\ \lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{e^y}{y} = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{\ln x}}{\ln x} = +\infty \qquad \text{ainsi } \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty, \text{ puis } \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+.$$

2. Pour tout $n > 1$ avec $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{\ln x}{x^n} = \dfrac{1}{x^{n-1}} \times \dfrac{\ln x}{x}$

   comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^{n-1}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ alors par produit de limites, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$

3. De la même façon, pour tout $x > 0$, on pose $y = \ln x$. On dans ce cas $e^y = x$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty \\ \\ \lim\limits_{y \to -\infty} e^y y = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} e^{\ln x} \ln x = 0 \qquad \text{ainsi } \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x \ln x = 0.$$

4. Pour tout $n > 1$ avec $n \in \mathbb{N}$, on a $x^n \ln x = x^{n-1} \times x \ln x$

   comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^{n-1} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x \ln x = 0$ alors produit de limites, on obtient $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^n \ln x = 0$

Propriété: Limite et taux d'accroissement

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Démonstration :

La fonction ln est dérivable en 1, donc par définition $\ln'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h}$.

Comme $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$, on a $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$.

Méthode : Souvent dans le cas d'une F.I. faisant intervenir la fonction ln, on essaie de

- factoriser et faire apparaître des limites déjà connues ;
- procéder à un changement de variable.

Exemple : Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x\to+\infty} (\ln x - 2x)$ puis $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

1. Pour tout réel $x > 0$, $\ln x - 2x = x\left(\frac{\ln x}{x} - 2\right)$.

   Or par propriété, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. On a

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} - 2 = -2 \\ \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - 2\right) = -\infty$$

2. Pour tout réel $x > 0$, on pose $y = \frac{1}{x}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+ \\ \lim_{y\to 0^+} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$$

   Ainsi $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$

Exemple : Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x^2}\right)$. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

- *Limite en* $+\infty$.

  Pour tout $x > 0$, on a $\frac{x+2}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$. D'où

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x^2} = 0$$

  On pose $y = \frac{x+2}{x^2}$. On a

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x^2} = 0^+ \\ \lim_{y\to 0^+} \ln y = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x^2}\right) = -\infty$$

- *Limite en* 0.

  On va utiliser un théorème de comparaison. En effet, pour tout $x > 0$, on a

  $\frac{x+2}{x^2} > \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$.

  Or ln est croissante sur $]0;+\infty[$, donc

  $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) > \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$.

  Comme $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, on a $\lim_{x\to 0^+} -\ln x = +\infty$ donc par comparaison $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.