

CHAPITRE 12 Succession d'épreuves indépendantes et loi binomiale

Manuel p. 364-401

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

Ce chapitre se situe dans le prolongement des deux chapitres sur les probabilités du programme de Première spécialité (« Probabilités conditionnelles » et « Variables aléatoires réelles ») et du chapitre sur « Dénombrement » de Terminale spécialité. Son objectif est double :

- faire découvrir et utiliser les variables aléatoires suivant les lois de Bernoulli et binomiale ainsi que toutes les notions en lien (épreuves de Bernoulli, schéma de Bernoulli) ;
- mobiliser et faire travailler les acquis sur les trois chapitres évoqués précédemment.

Une place particulière est donnée aux notions d'intervalle de fluctuation (bien que l'expression ne soit pas employée dans le programme, il nous a semblé utile de l'appeler ainsi) et de seuil en se dégageant du systématisme induit par l'ancien programme (« on calcule l'intervalle de fluctuation bilatéral et on regarde si la fréquence est dedans »), notamment en variant les types d'intervalles selon le contexte (à droite, à gauche ou centré), le tout dans des situations concrètes et variées.

Enfin, on trouvera de nombreux exercices et TP permettant la pratique de la programmation.

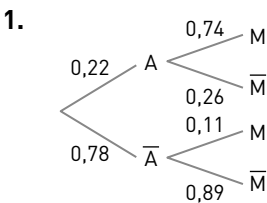
Objectifs

- Modéliser une succession d'épreuves, notamment dans le cas d'indépendance.
- Travailler avec un schéma de Bernoulli ou la loi binomiale.
- Utiliser l'espérance et l'écart-type de la loi binomiale.
- Vérifier si un événement sera réalisé à un seuil donné.
- Déterminer et utiliser un intervalle de fluctuation.

II. Corrigés

Pour prendre un bon départ p. 365

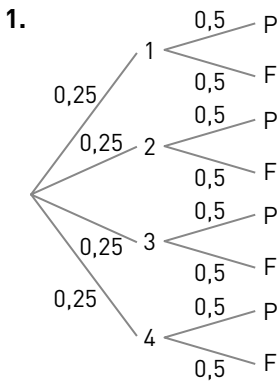
1. Utiliser un arbre pondéré



2. a) $p(A \cap M) = 0,22 \times 0,74 = 0,1628$ et
 $p(M) = 0,22 \times 0,74 + 0,78 \times 0,11 = 0,2486$.

b) $p_M(A) = \frac{p(A \cap M)}{p(M)} = \frac{0,1628}{0,2486} \approx 0,6549$

2. Représenter une succession de deux épreuves indépendantes



Lancer de dé \ Lancer de pièce	1	2	3	4
P	$\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
F	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

2. $3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = 0,375$ (voir cases grisées dans le tableau).

3. Modéliser par une variable aléatoire

1.

g_i	-1	0	4	19	99
$p(G = g_i)$	0,865	0,1	0,02	0,01	0,005

2. a) • $E(G) = 0,865 \times (-1) + 0,1 \times 0 + 0,02 \times 4 + 0,01 \times 19 + 0,005 \times 99$
 $= -0,1$
- $V(G) = 0,865 \times (-1 - (-0,1))^2 + 0,1 \times (0 - (-0,1))^2 + 0,02 \times (4 - (-0,1))^2 + 0,01 \times (19 - (-0,1))^2 + 0,005 \times (99 - (-0,1))^2$
 $= 53,79$
- $\sigma(G) = \sqrt{V(G)} = \sqrt{53,79} \approx 7,33$
- b) Non car $E(G) \neq 0$.
3. $p(G \geq 15) = p(G = 19) + p(G = 99) = 0,01 + 0,005 = 0,015$.

4. Savoir dénombrer

- a) $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$
- b) $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
- c) $\binom{1000}{0} = 1$
- d) $\binom{36}{36} = 1$
- e) $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \times (5 - 3)!} = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{120}{6 \times 2} = 10$
- f) $\binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \times (6 - 4)!} = \frac{6 \times 5!}{4! \times 2!} = \frac{6 \times 120}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = \frac{120}{8} = 15$

Activités

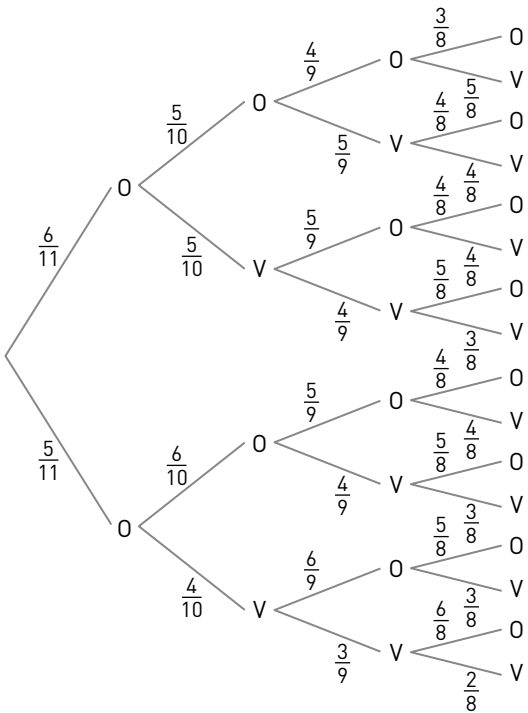
p. 366-367

1 Observer des tirages indépendants ou non

- **Durée estimée** : 25 min
- **Objectif** : Découvrir une méthode de calcul des probabilités dans le cas de tirages indépendants dans le cadre d’une question ouverte.

A. Avec des boules

On a :



donc cette probabilité est

$$\frac{5}{11} \times \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{66} \approx 0,015.$$

B. Avec des dés

L’arbre est trop compliqué à faire mais si on commence à le tracer, on s’aperçoit que, comme les tirages sont indépendants, les probabilités présentes sur le chemin sont les probabilités d’obtenir respectivement 2 puis 3 puis 4 etc.

On a :

Dé 1 \ Dé 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

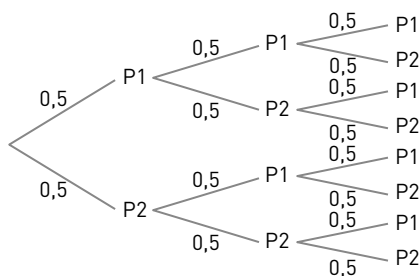
La probabilité cherchée est donc

$$p(2) \times p(3) \times \dots \times p(12) = \frac{1}{36} \times \frac{2}{36} \times \frac{3}{36} \times \frac{4}{36} \times \frac{5}{36} \times \frac{6}{36} \times \frac{5}{36} \times \frac{4}{36} \times \frac{3}{36} \times \frac{2}{36} \times \frac{1}{36} = \frac{6! \times 5!}{36^{11}} \approx 7 \times 10^{-13}.$$

2 Reconnaître un schéma de Bernoulli

- **Durée estimée :** 25 min
- **Objectif :** Découvrir les schémas de Bernoulli.

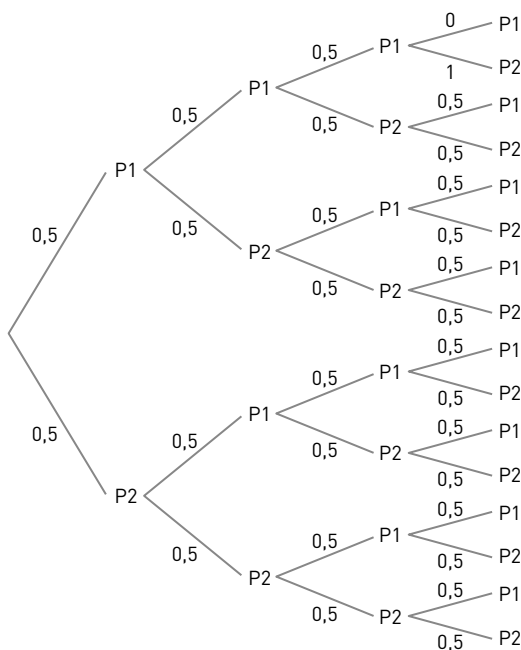
1. a)



b) La probabilité que le programme P1 soit au moins à moitié exécuté à l'issue des trois plages est la probabilité qu'il soit appelé 2 ou 3 fois c'est-à-dire $4 \times 0,5 \times 0,5 \times 0,5 = 0,5$ (chemins 1, 2, 3 et 5 en partant du haut de l'arbre).

c) Oui et oui.

2. a)



b) On ne répète pas des épreuves identiques car dans le cas où le programme P1 est appelé les trois premières fois, alors il est entièrement exécuté et ne peut plus être appelé.

La dernière épreuve a donc forcément pour résultat P2, ce qui n'est pas le cas des autres épreuves : ce n'est pas un schéma de Bernoulli (c'était le cas pour la succession des 3 premières plages dans la question 1. a).

3 Découvrir la loi binomiale

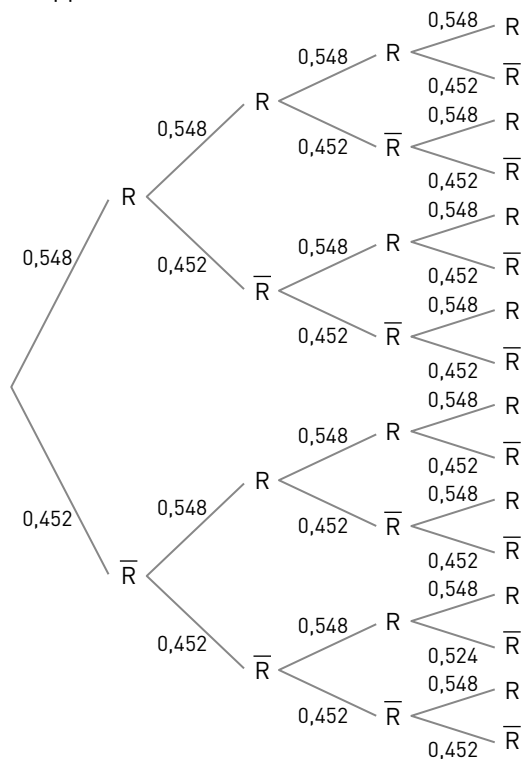
- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Découvrir la loi binomiale et calculer des probabilités « à la main » à l'aide de l'arbre associé au schéma de Bernoulli.

1. La réponse dépend de l'élève.

2. a) Soit le tir est réussi (c'est un succès), soit non. C'est donc bien une épreuve de Bernoulli.

b) On doit supposer que les résultats des tirs successifs sont indépendants.

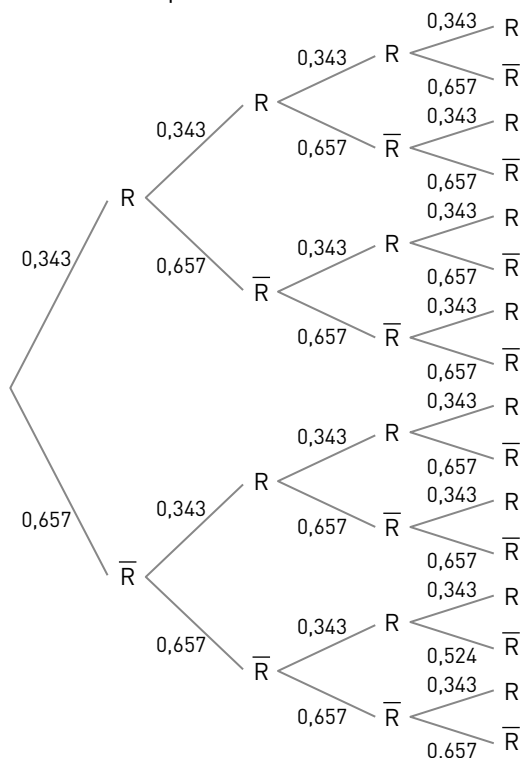
c) En appelant R un tir réussi :



d) La probabilité qu'au moins 3 tirs soient réussis est $4 \times 0,548^3 \times 0,452 + 0,548^4 \approx 0,39$ (il y a 4 chemins avec 3 tirs réussis : le 2^e, le 3^e, le 5^e et 9^e et 1 chemin avec 4 tirs réussis : le 1^{er}).

3. a) • Soit le tir est réussi (c'est un succès), soit non donc c'est bien une épreuve de Bernoulli.

• On doit supposer que les résultats des tirs successifs sont indépendants.



b) La probabilité qu'au moins 2 tirs soient réussis est :

$6 \times 0,343^2 \times 0,657^2 + 4 \times 0,343^3 \times 0,657 + 0,343^4 \approx 0,42$ (il y a 6 chemins avec 2 tirs réussis : le 4^e, le 6^e, le 7^e, le 10^e, le 11^e et 13^e, il y a 4 chemins avec 3 tirs réussis : le 2^e, le 3^e, le 5^e et 9^e et 1 chemin avec 4 tirs réussis : le 1^{er}).

4. Dans ces deux cas, il marque au moins 6 points si $D \geq 3$ ou $T \geq 2$ dont les probabilités respectives sont approximativement 0,39 et 0,42 : il doit donc préférer l'option à 3 points.

4 Trouver une probabilité avec la loi binomiale

• **Durée estimée :** 25 min

• **Objectif :** Découvrir la formule donnant $p(X = k)$ dans le cas où X suit la loi binomiale.

1. a) D suit la loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0,548$.

b) $2^8 = 256$

2. $12 = 6 \times 2$ donc l'événement « marquer exactement 12 points » correspond à l'événement $D = 6$ donc $k = 6$.

3. a) On considère l'ensemble $\{a ; b ; c ; d ; e ; f\}$, où a, b, c, d, e et f sont des entiers distincts compris entre 1 et 8, correspondant aux numéros des branches sur lesquelles se trouvent les pondérations 0,548 sur un chemin correspondant à 6 succès (par exemple $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 8\}$ correspond au chemin de 8 branches sur lesquelles les pondérations 0,543 se trouvent sur les branches numéros 1, 2, 3, 4, 5 et 8).

Trouver le nombre de branches correspondant à 6 succès (en 8 tirs) revient à trouver le nombre d'ensembles à 6 éléments distincts choisis parmi 8

c'est-à-dire $\binom{8}{6} = 28$.

b) La probabilité associée à chacun de ces chemins est $0,548^6 \times 0,452^2$.

c) La probabilité qu'il marque exactement 12 points est donc $p(D = 6) = 28 \times 0,548^6 \times 0,452^2 \approx 0,15$.

À vous de jouer

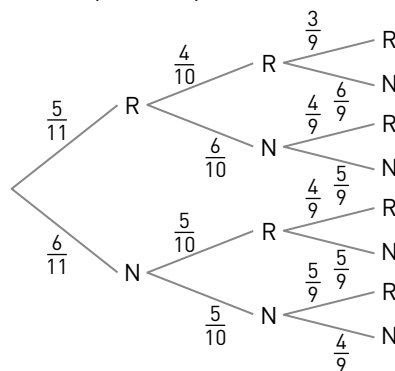
p. 369

1. 1. a) Oui : on remet la boule tirée dans l'urne donc sa composition est identique à chaque tirage.

b) Les tirages sont indépendants donc

$$p([R ; N ; N]) = \frac{5}{11} \times \frac{6}{11} \times \frac{6}{11} = \frac{180}{1331} \approx 0,135.$$

2. On ne remet pas la boule tirée dans l'urne donc sa composition change à chaque tirage : les tirages ne sont pas indépendants.



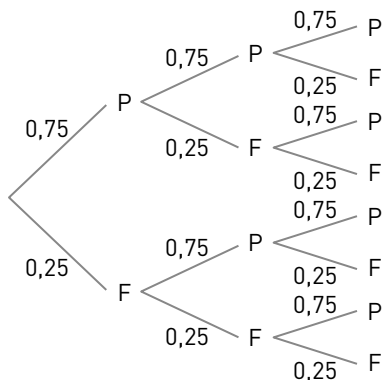
$$\frac{5}{11} \times \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{33} \approx 0,152.$$

2. L'univers associé à cette expérience est $\{G; D; A\}^6$ et

$$p(\{D; D; G; D; D; A\}) = 0,87^4 \times 0,12 \times 0,01 \approx 0,0007.$$

3. 1. On considère une succession de 3 expériences de Bernoulli (en considérant qu'un succès est obtenir « PILE » par exemple) identiques et indépendantes avec la probabilité d'un succès qui est 0,75 donc cette succession d'épreuves est bien un schéma de Bernoulli avec $n = 3$ et $p = 0,75$.

2.



3. La probabilité d'obtenir exactement un succès est $3 \times 0,75 \times 0,25^2 = 0,140625$ (4^e, 6^e et 7^e chemins).

4. 1. Toutes les parties sont indépendantes.

2. Si on fait un arbre, il y a un seul chemin correspondant à 5 parties perdues et toutes les pondérations inscrites dessus sont 0,9 donc cette probabilité est $0,9^5 = 0,59049$.

On peut aussi utiliser la formule générale pour une succession d'épreuves indépendantes $p(\{E; E; E; E; E\}) = p(E) \times p(E) \times p(E) \times p(E) \times p(E) = 0,9^5$.

5. 1. X donne le nombre de succès lorsque l'on réalise $n = 20$ fois de manière indépendante la même épreuve de Bernoulli (un succès correspond à « obtenir FACE ») de paramètre $p = 0,5$ donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,5$.

$$\begin{aligned} 2. p(X = 11) &= \binom{20}{11} \times 0,5^{11} \times 0,5^{20-11} \\ &= \binom{20}{11} \times 0,5^{20} \approx 0,16 \end{aligned}$$

6. 1. T donne le nombre de succès lorsque l'on réalise $n = 15$ fois de manière indépendante la même épreuve de Bernoulli (un succès corres-

pond à « obtenir un trèfle ») de paramètre $p = 0,25$ donc T suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,25$.

$$\begin{aligned} 2. p(T = 5) &= \binom{15}{5} \times 0,25^5 \times 0,75^{15-5} \\ &= \binom{15}{5} \times 0,25^5 \times 0,75^{10} \approx 0,17 \end{aligned}$$

$$7. 1. p(X > 6) = 1 - p(X \leq 6) \approx 0,62$$

$$2. p(3 \leq X < 12) = p(X \leq 11) - p(X \leq 2) \approx 0,97$$

$$8. 1. p(Y < 24) = p(Y \leq 23) \approx 0,15$$

$$2. p(21 < Y < 25) = p(Y \leq 24) - p(Y \leq 21) \approx 0,26$$

9. • L'espérance associée à B_1 est environ 22 et celle associée à B_2 est environ 4 donc B_1 a la plus grande espérance.

• Le diagramme associé à B_2 est plus haut et moins large que celui associé à B_1 donc c'est la loi à B_1 qui a le plus grand écart-type.

10. 1. $E(X) \approx 4$ et $n \times 0,22 = E(X)$ donc $n = 20$ puisque n est un multiple de 10.

$$2. V(X) = 20 \times 0,22 \times 0,78 = 3,432$$

11. La probabilité qu'il puisse accueillir tous les clients se présentant est $p(C \leq 43) \approx 0,98$ donc oui.

12. La probabilité qu'elle ait au moins 29 élèves dans sa classe l'année prochaine est $p(E \geq 29) \approx 0,993$ donc oui.

13. Ici, $\alpha = 0,1$ et $\frac{\alpha}{2} = 0,05$.

$p(Y < 3) = p(Y \leq 2) \approx 0,0996 > 0,05$ donc $[3; 9]$ n'est pas centré.

14. Ici, $\alpha = 0,05$ et $\frac{\alpha}{2} = 0,025$.

$p(Z < 11) = p(Z \leq 10) \approx 0,012 \leq 0,025$ et $p(Z > 26) = 1 - p(Z \leq 26) \approx 0,0245 \leq 0,025$ donc $[11; 26]$ est centré.

15. On tabule $p(Y \leq k)$:

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP					
APP SUR + POUR ΔTb1					
X	Y1				
24	0.7316				
25	0.8028				
26	0.8607				
27	0.9055				
28	0.9384				
29	0.9614				
30	0.9768				
31	0.9866				
32	0.9926				
33	0.9961				
34	0.998				

X=34

donc $k = 32$.

16. On tabule $p(Z \leq k)$:

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP					
APP SUR + POUR ΔTb1					
X	Y1				
15	1.3E-4				
16	5.3E-4				
17	0.0019				
18	0.0062				
19	0.0179				
20	0.0451				
21	0.1004				
22	0.1968				
23	0.3397				
24	0.5174				
25	0.6993				

X=25

donc $k = 19$.

17. $p(Y \geq k) = 1 - p(Y < k)$
 $= 1 - p(Y \leq k - 1)$ donc $p(Y \geq k) > 0,8$

$\Leftrightarrow 1 - p(Y \leq k - 1) > 0,8$

$\Leftrightarrow p(Y \leq k - 1) < 0,2$

On tabule $p(Y \leq x)$:

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP					
APP SUR + POUR ΔTb1					
X	Y1				
0	0.0114				
1	0.0658				
2	0.1919				
3	0.3811				
4	0.5875				
5	0.762				
6	0.881				
7	0.9482				
8	0.9803				
9	0.9934				
10	0.998				

X=0

donc $k - 1 = 2$ puis $k = 3$.

18. $p(Z \geq k) = 1 - p(Z < k)$
 $= 1 - p(Z \leq k - 1)$

donc $p(Z \geq k) \leq 0,02$

$\Leftrightarrow 1 - p(Z \leq k - 1) \leq 0,02$

$\Leftrightarrow p(Z \leq k - 1) \geq 0,98$.

On tabule $p(Z \leq x)$:

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP					
APP SUR + POUR ΔTb1					
X	Y1				
21	0.7049				
22	0.7861				
23	0.852				
24	0.9023				
25	0.9385				
26	0.9632				
27	0.979				
28	0.9886				
29	0.9941				
30	0.9971				
31	0.9986				

X=31

donc $k - 1 = 28$ puis $k = 29$.

19. Ici $\frac{\alpha}{2} = 0,05$ et $1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95$ donc on cherche les

plus petits entiers a et b tels que $p(Y \leq a) > 0,05$ et $p(Y \leq b) \geq 0,95$.

On tabule $p(Y \leq x)$:

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP					
APP SUR + POUR ΔTb1					
X	Y1				
5	0.0406				
6	0.0955				
7	0.188				
8	0.318				
9	0.4725				
10	0.6289				
11	0.7649				
12	0.8668				
13	0.933				
14	0.9702				
15	0.9884				

X=15

l'intervalle cherché est $[6 ; 14]$.

20. Ici $\frac{\alpha}{2} = 0,005$ et $1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995$ donc on cherche

les plus petits entiers a et b tels que $p(Z \leq a) > 0,005$ et $p(Z \leq b) \geq 0,995$.

On tabule $p(Z \leq x)$:

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP				
APP SUR + POUR ΔTb1				
X	Y1			
62	0.0015			
63	0.003			
64	0.0057			
65	0.0105			
66	0.0185			
67	0.0312			
68	0.0507			
69	0.079			
70	0.1184			
71	0.1703			
72	0.2354			

X=72

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP				
APP SUR + POUR ΔTb1				
X	Y1			
78	0.764			
79	0.8337			
80	0.8891			
81	0.9304			
82	0.959			
83	0.9774			
84	0.9885			
85	0.9946			
86	0.9977			
87	0.9991			
88	0.9997			

X=88

l'intervalle cherché est [64 ; 86].

Exercices
apprendre à démontrer p. 380

Pour s'entraîner

L'événement $X = k$ est réalisé si et seulement si on n'a pas obtenu de 1 lors des $k - 1$ premiers essais. En considérant qu'un succès S lors d'un lancer est

« obtenir 1 », de probabilité $\frac{1}{6}$, $p(X = k)$ est donc la probabilité de l'issue $\{E ; E ; \dots ; E ; S\}$ lorsque l'on répète k fois de manière indépendante une même expérience de Bernoulli donc

$$p(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} = \frac{5^{k-1}}{6^k}.$$

Remarque : X suit la loi géométrique de paramètre

$$\frac{1}{6}.$$

Exercices
calculs et automatismes p. 381

21. Répétition d'épreuves indépendantes

$$\frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{5}{8} \approx 0,013.$$

22. Épreuve de Bernoulli (1)

b)

23. Épreuve de Bernoulli (2)

a) et b)

24. Loi de Bernoulli

Faux il faut que ces valeurs soient 0 ou 1.

25. Schéma de Bernoulli

On doit justifier que ces épreuves sont des épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

26. Loi binomiale (1)

c) Attention, on regarde le nombre d'échecs et 0,2 est la probabilité d'un succès.

27. Loi binomiale (2)

$$\binom{4}{1} \times 0,1^1 \times 0,9^3 = 0,2916$$

28. Loi binomiale (3)

$$\binom{10}{1} \times 0,9^1 \times 0,1^9 = 10 \times 0,9 \times 0,1^9 = 9 \times 10^{-9}$$

29. Espérance de la loi binomiale (1)

b) $200 \times 0,63 = 126$

30. Espérance de la loi binomiale (2)

b) Valeur sur laquelle la cloche est approximativement centrée.

31. Intervalle de fluctuation

a) Vrai

$p(X \in [1 ; 9]) \approx 0,9876 - 0,0016 = 0,986 > 0,95.$

b) Faux [2 ; 9] obtenu avec la méthode 10 est plus petit que [1 ; 9].

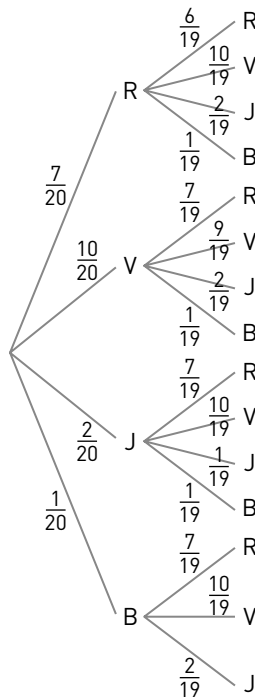
Exercices d'application

p. 382-386

Succession d'épreuves, indépendantes ou non

32. 1. Non car chaque tirage change la composition de l'urne donc a de l'influence sur les suivants.

2. Dans l'arbre ci-après, R désigne l'obtention d'une boule rouge, V d'une boule verte, J d'une boule jaune et B d'une boule bleue.



3. a) $\frac{7}{20} \times \frac{6}{19} = \frac{21}{190} \approx 0,111$

b) $\frac{10}{20} \times \frac{2}{19} + \frac{2}{20} \times \frac{10}{19} = \frac{2}{19} \approx 0,105$

c) Appelons J_1 l'événement « la première boule est jaune » et R_2 l'événement « la deuxième boule est rouge ».

On cherche $p_{R_2}(J_1) = \frac{p(J_1 \cap R_2)}{p(R_2)}$ avec :

• $p(J_1 \cap R_2) = \frac{2}{20} \times \frac{7}{19} = \frac{7}{190}$

• $p(R_2) = \frac{7}{20} \times \frac{6}{19} + \frac{10}{20} \times \frac{7}{19} + \frac{2}{20} \times \frac{7}{19} + \frac{1}{20} \times \frac{7}{19}$
 $= \frac{133}{380} = \frac{7}{20}$

donc $p_{R_2}(J_1) = \frac{\frac{7}{190}}{\frac{7}{20}} = \frac{7}{190} \times \frac{20}{7} = \frac{2}{19} \approx 0,105$.

d) Appelons V_1 l'événement « la première boule est verte » et B_2 l'événement « la deuxième boule est bleue ».

On cherche $p_{B_2}(V_1) = \frac{p(V_1 \cap B_2)}{p(B_2)}$ avec :

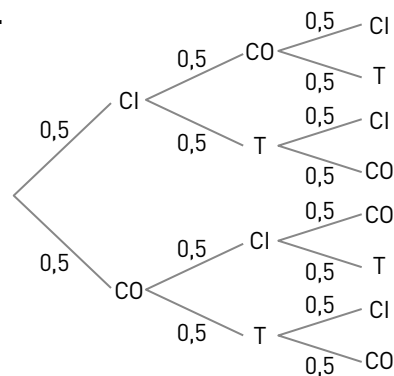
• $p(V_1 \cap B_2) = \frac{10}{20} \times \frac{1}{19} = \frac{1}{38}$

• $p(B_2) = \frac{7}{20} \times \frac{1}{19} + \frac{10}{20} \times \frac{1}{19} + \frac{2}{20} \times \frac{1}{19} = \frac{1}{20}$

donc $p_{B_2}(V_1) = \frac{\frac{1}{38}}{\frac{1}{20}} = \frac{1}{38} \times \frac{20}{1} = \frac{10}{19} \approx 0,526$.

33. 1. Comme elles ne font pas deux fois de suite la même activité, cela veut dire que l'activité d'une semaine a de l'influence sur l'activité de la semaine suivante donc les épreuves ne sont pas indépendantes.

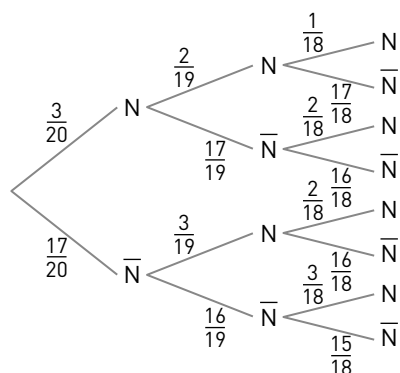
2.



3. 2 $\times 0,5^3 = 0,25$ (1^{er} et 3^e chemins).

34. 1. Non car chaque tirage change la composition de l'urne donc a de l'influence sur les suivants.

2.



$$3. \frac{3}{20} \times \frac{17}{19} \times \frac{16}{18} + \frac{17}{20} \times \frac{3}{19} \times \frac{16}{18} + \frac{17}{20} \times \frac{16}{19} \times \frac{3}{18}$$

$$= \frac{34}{95} \approx 0,358 \text{ (4}^{\text{e}}, 6^{\text{e}} \text{ et } 7^{\text{e}} \text{ chemins).}$$

35. 1. C'est un tirage avec remise donc la composition de l'urne reste la même à chaque tirage : les différents tirages n'ont pas d'influence les uns sur les autres.

2. En notant B, G, N, O et V les différentes couleurs, l'univers associé à cette succession de trois épreuves est $\{B; G; N; O; V\}^3$.

$$3. p(B; G; V) = p(B) \times p(G) \times p(V)$$

$$= 0,23 \times 0,12 \times 0,11 \approx 0,003$$

36. 1. Oui.

$$2. \{1; 2; 3; 4\}^5$$

$$3. p(\{1; 3; 1; 2; 4\}) = 0,4 \times 0,2 \times 0,4 \times 0,2 \times 0,2$$

$$= 0,00128$$

37. 1. En prenant l'initiale de chaque activité (par exemple P pour pilate) $\{P; S; M\} \times \{Z; C\} \times \{F; Y; T\}$.

$$2. p(P; C; Y) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{6} = 0,05.$$

38. 1. Les résultats n'étant pas connus avant les matchs, ils ne peuvent pas avoir d'influence les uns sur les autres quand on considère ces trois expériences aléatoires *a priori*.

2. V désigne la victoire et N le match nul :

$$\{V_{\text{Reims}}; N; V_{\text{Lille}}\} \times \{V_{\text{Strasbourg}}; N; V_{\text{Monaco}}\} \times \{V_{\text{Marseille}}; N; V_{\text{Saint-Étienne}}\}$$

$$3. p(V_{\text{Reims}}; N; V_{\text{Marseille}}) = 0,34 \times 0,26 \times 0,55 = 0,04862.$$

Épreuve et loi de Bernoulli

39. En considérant qu'un succès est « L'élève a choisi la spécialité mathématiques » alors c'est une expérience à deux issues, donc une épreuve de Bernoulli, avec la probabilité d'un succès $p = 0,71$.

Remarque : Il est tout aussi légitime de considérer qu'un succès est « L'élève n'a pas choisi la spécialité mathématiques » auquel cas, $p = 0,29$.

40. 1. En considérant qu'un succès est « Le TGV arrive à l'heure » alors c'est une expérience à deux issues, donc une épreuve de Bernoulli.

2. La probabilité d'un succès est $p = 0,879$.

41. Il y a trois résultats possibles à cette épreuve (pierre, feuille ou ciseau) donc ce n'est pas une épreuve de Bernoulli.

42. Par exemple, on tire au sort une boule dans une urne contenant 3 boules rouges et 7 boules vertes et on considère qu'un succès est « obtenir une boule rouge ».

43. 1. C'est une expérience de Bernoulli car elle a deux issues.

2. 0,5

3. Soit p la probabilité d'obtenir PILE. Ici,

$$1 - p = 2p \Leftrightarrow 1 = 3p \Leftrightarrow p = \frac{1}{3}.$$

44. On obtient :

- PILE ou 0 fois FACE avec une probabilité $\frac{2}{3}$;

- FACE ou 1 fois FACE avec une probabilité $\frac{1}{3}$;

donc les valeurs prises par X sont bien 0 et 1 avec

$$p(X = 1) = \frac{1}{3} \text{ donc } p = \frac{1}{3}.$$

45. 1. Le chiffre des dizaines d'un entier entre 1 et 12 est 0 ou 1.

$$\text{Le dé étant équilibré, } p(X = 0) = \frac{9}{12} = 0,75 \text{ (résultats}$$

$$1; 2; 3; \dots; 8 \text{ et } 9) \text{ et } p(X = 1) = \frac{3}{12} = 0,25 \text{ (résultats}$$

10 ; 11 et 12) donc X suit une loi de Bernoulli avec $p = 0,25$.

2. On a :

Dé 4 \ Dé 8	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10	11	12

D'après ce tableau, $p(Y = 0) = \frac{26}{32} = \frac{13}{16}$ (résultats 2 ;

3 ; ... ; 8 et 9) et $p(Y = 1) = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$ (résultats 10 ; 11 et

12) donc Y suit une loi de Bernoulli avec $p = \frac{3}{16}$.

46. `random.random()` renvoie un flottant aléatoire entre 0 et 1 donc cette fonction renvoie 1 avec une probabilité 0,63 et 0 avec une probabilité 0,37 donc X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,63$.

47. `random.random()` renvoie un flottant aléatoire entre 0 et 1 donc cette fonction renvoie 0 avec une probabilité 0,41 et 1 avec une probabilité 0,59 donc X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,59$.

48.

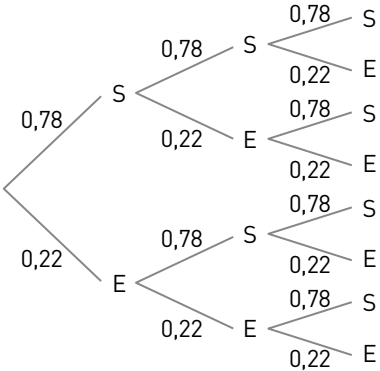
```

def bernoulli (p) :
    if random.random () <= p :
        x = 1
    else :
        x = 0
    return x
    
```

Schéma de Bernoulli

49. 1. On doit supposer que les lancers sont indépendants.

2. On considère qu'un succès (S) désigne le fait de planter la boule sur le socle.

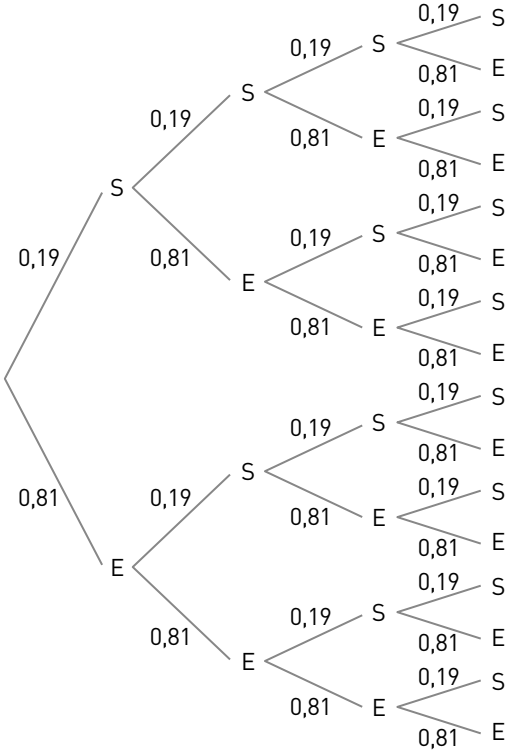


3. a) $0,78 \times 0,22 \times 0,22 + 0,22 \times 0,78 \times 0,22 + 0,22 \times 0,22 \times 0,78 \approx 0,113$.

b) $0,78^3 + 3 \times 0,78^2 \times 0,22 \approx 0,876$

50. 1. On doit supposer que les appels sont indépendants.

2. On considère qu'un succès (S) désigne le fait que l'appel soit injustifié.



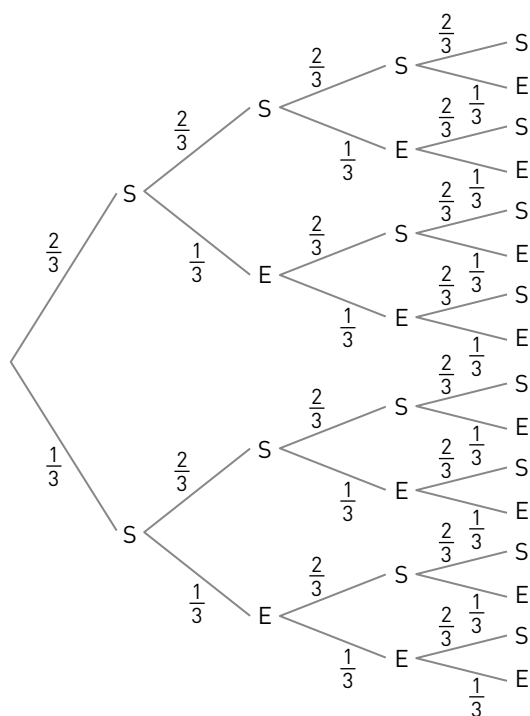
3. a) $6 \times 0,81^2 \times 0,19^2 \approx 0,142$

b) C'est le contraire de « tous les appels sont injustifiés » donc $1 - 0,19^4 \approx 0,999$.

51. 1. En considérant qu'un succès (S) est « il regarde son téléphone », on considère une succession de 4 expériences de Bernoulli identiques et indépendantes avec la probabilité d'un succès qui est $\frac{2}{3}$ donc cette succession d'épreuves est bien

un schéma de Bernoulli avec $n = 4$ et $p = \frac{2}{3}$.

2.



$$3. \left(\frac{2}{3}\right)^4 + 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} \approx 0,296$$

$$52. a) p(X = 1) = \binom{4}{1} \times 0,42^1 \times 0,58^3 \approx 4 \times 0,42 \times 0,195 \approx 0,328$$

$$b) p(X = 2) = \binom{4}{2} \times 0,42^2 \times 0,58^2 \approx 6 \times 0,176 \times 0,336 \approx 0,355$$

$$c) p(Y = 1) = \binom{4}{1} \times 0,58^1 \times 0,42^3 \approx 4 \times 0,58 \times 0,074 \approx 0,172$$

$$d) p(Y = 2) = \binom{4}{2} \times 0,58^2 \times 0,42^2 \approx 0,355$$

Remarque : Ces approximations ne sont pas très bonnes.

$$53. a) p(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,34^2 \times 0,66^8 \approx 45 \times 0,12 \times 0,04 = 0,216$$

$$b) p(X = 4) = \binom{10}{4} \times 0,34^4 \times 0,66^6 \approx 210 \times 0,01 \times 0,08 = 0,168$$

$$c) p(Y = 9) = \binom{10}{9} \times 0,66^9 \times 0,34^1 \approx 10 \times 0,02 \times 0,34 = 0,068$$

$$d) p(Y = 2) = \binom{10}{2} \times 0,66^2 \times 0,34^8 \approx 45 \times 0,44 \times 0 = 0$$

Remarque : Ces approximations ne sont pas très bonnes.

54. 1. En considérant qu'un succès pour chacun des lancers est « obtenir rouge », X donne le nombre de succès lorsque l'on réalise $n = 20$ fois de manière indépendante la même expérience de Bernoulli, dont la probabilité de succès (« obtenir rouge ») est $p = \frac{18}{37}$. Donc X suit la loi binomiale de

paramètres $n = 20$ et $p = \frac{18}{37}$.

$$2. \text{ On cherche } p(X = 9) = \binom{20}{9} \times \left(\frac{18}{37}\right)^9 \times \left(\frac{19}{37}\right)^{11} \approx 0,168$$

55. 1. En considérant qu'un succès pour chacun des 10 passagers est « le passager s'est endormi », X donne le nombre de succès lorsque l'on réalise $n = 10$ fois de manière indépendante la même expérience de Bernoulli dont la probabilité de succès (« le passager s'est endormi ») est $p = 0,68$. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,68$.

$$2. \bullet p(X=8) = \binom{10}{8} \times 0,68^8 \times 0,32^2 \approx 0,211$$

$$\bullet p(X=9) = \binom{10}{9} \times 0,68^9 \times 0,32^1 \approx 0,099$$

$$\bullet p(X=10) = \binom{10}{10} \times 0,68^{10} \times 0,32^0 \approx 0,021$$

$$3. \text{ On cherche } p(X \geq 8) = p(X=8) + p(X=9) + p(X=10) \\ \approx 0,211 + 0,099 + 0,021 \\ = 0,331.$$

Remarque : On peut aussi utiliser les fonctionnalités avancées de la calculatrice.

56. 1. En considérant qu'un succès pour chacun des 35 élèves est « l'élève est mineur en fin d'année », M donne le nombre de succès lorsque l'on réalise $n = 35$ fois de manière indépendante la même expérience de Bernoulli, dont la probabilité de succès (« l'élève est mineur en fin d'année ») est $p = 0,33$. Donc M suit la loi binomiale de paramètres $n = 35$ et $p = 0,33$.

$$2. \bullet p(M=10) = \binom{35}{10} \times 0,33^{10} \times 0,67^{25} \approx 0,126$$

$$\bullet p(M=11) = \binom{35}{11} \times 0,33^{11} \times 0,67^{24} \approx 0,141$$

$$\bullet p(M=12) = \binom{35}{12} \times 0,33^{12} \times 0,67^{23} \approx 0,139$$

3. On cherche

$$p(10 \leq M \leq 12) = p(M=10) + p(M=11) + p(M=12) \\ \approx 0,126 + 0,141 + 0,139 = 0,406$$

Remarque : On peut aussi utiliser les fonctionnalités avancées de la calculatrice.

Calculs de probabilités avec la loi binomiale

$$57. \text{ a) Environ } 0,197. \quad \text{b) Environ } 0,366. \\ \text{c) Environ } 0,861. \quad \text{d) Environ } 0,66.$$

$$58. \text{ a) Environ } 0,327. \quad \text{b) Environ } 0,059. \\ \text{c) Environ } 0,648. \quad \text{d) Environ } 0,354.$$

$$59. \text{ a) Environ } 0,839. \quad \text{b) Environ } 0,348. \\ \text{c) Environ } 0,573. \quad \text{d) Environ } 0,439.$$

$$60. \text{ a) Environ } 0,398. \quad \text{b) Environ } 0,637. \\ \text{c) Environ } 0,922. \quad \text{d) Environ } 0,95.$$

61. G suit la loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = 0,1$.

$$\text{a) } p(G > 100) \approx 0,473$$

$$\text{b) } p(G < 85) \approx 0,049$$

$$\text{c) } p(95 \leq G \leq 105) \approx 0,438$$

$$\text{d) } p(90 < G < 110) \approx 0,684$$

62. On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de personnes végétariennes parmi les 250 personnes prenant un repas à cette cantine. Elle suit la loi binomiale de paramètres $n = 250$ et $p = 0,12$. On cherche $p(X > 32) \approx 0,307$.

63. On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de personnes en fauteuil roulant parmi les 1 250 personnes prenant ce train. Elle suit la loi binomiale de paramètres $n = 1250$ et $p = 0,02$. On cherche $p(X > 30) \approx 0,134$.

Espérance, variance et écart-type par le calcul

$$64. 1. \bullet E(X) = 20 \times 0,83 = 16,6$$

$$\bullet V(X) = 20 \times 0,83 \times 0,17 = 2,822$$

$$\bullet \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2,822} \approx 1,680$$

$$2. \bullet E(Y) = 100 \times 0,79 = 79$$

$$\bullet V(Y) = 100 \times 0,79 \times 0,21 = 16,59$$

$$\bullet \sigma(X) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{16,59} \approx 4,073$$

65.

```
def param_binom(n,p):
    e=n*p
    v=n*p*(1-p)
    s=math.sqrt(v)
    return [e,v,s]
```

66. 1. En supposant les tickets indépendants, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,1$ et Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,05$.

On a donc $E(X) = 10 \times 0,1 = 1$ et $E(Y) = 20 \times 0,05 = 1$ donc $E(X) = E(Y)$ ce qui veut dire « qu'en moyenne », sur un grand nombre de répétitions, elle aura un seul ticket gagnant sur tous les tickets achetés dans les deux cas.

2. a) $\sigma(X) = \sqrt{10 \times 0,1 \times 0,9} \approx 0,949$ et

$\sigma(Y) = \sqrt{20 \times 0,05 \times 0,95} \approx 0,975$.

b) Comme $\sigma(Y) > \sigma(X)$, la dispersion est plus élevée en achetant 20 tickets du jeu n°2 c'est-à-dire que l'on aura des nombres de tickets globalement plus éloignés de l'espérance (1) sur un grand nombre de répétitions (mais c'est très léger car les écarts-types sont assez proches).

67. 1. $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$

donc $E(X)(1 - p) = V(X)$

soit $1 - p = \frac{V(X)}{E(X)} = \frac{27,648}{43,2} = 0,64$.

2. Ainsi $p = 1 - 0,64 = 0,36$ et $n = \frac{E(X)}{p} = \frac{43,2}{0,36} = 120$.

68. $V(Y) = 1,5^2 = 2,25$ donc il s'agit de résoudre $25 \times p \times (1 - p) = 2,25 \Leftrightarrow -25p^2 + 25p - 2,25 = 0$.

La résolution de cette équation donne $p = 0,1$ ou $p = 0,9$: 0,1 et 0,9 sont les valeurs possibles de p .

69. 1. $np = 2$ donc $n = \frac{2}{p}$.

On a $\frac{1}{0,15} \geq \frac{1}{p} \geq \frac{1}{0,16}$ donc $\frac{2}{0,15} \geq n = \frac{2}{p} \geq \frac{2}{0,16}$.

Comme $\frac{2}{0,15} \approx 13,3$ et $\frac{2}{0,16} \approx 12,5$ alors $n = 13$.

2. $p = \frac{2}{13}$

Espérance, variance et écart-type : aspect graphique

70. 1. a) $E(X) = 10$

b) $np = 10$ $n = \frac{10}{0,4} = 25$

2. Le diagramme en barres associé à B' est plus haut et moins large que celui associé à B donc

l'écart-type associé à B est plus grand que celui associé à B'.

71. 1. Soit X suivant la loi à B.

On peut penser que $E(X) \approx 7$ donc $p \approx \frac{7}{10} = 0,7$ donc $p = 0,66$.

2. Les diagrammes semblent symétriques ce qui veut dire qu'ils ont mêmes largeurs et hauteurs donc on peut penser qu'ils correspondent à des lois binomiales ayant mêmes écarts-types.

Vérification du respect d'un seuil

72. La variable aléatoire X donnant le nombre d'articles qu'il a trouvé suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,9$.

a) $p(X < 28) \approx 0,589$

donc $p(X < 28) < 0,99$ donc non.

b) $p(X \geq 23) \approx 0,992$

donc $p(X \geq 23) \geq 0,99$ donc oui.

c) $p(21 \leq X \leq 29) \approx 0,957$ donc $p(21 \leq X \leq 29) < 0,99$ donc non.

73. 1. $p(X \in [2 ; 24]) \approx 0,962$ donc

$p(X \in [2 ; 24]) \geq 0,95$: $[2 ; 24]$ est un intervalle de fluctuation au seuil de 0,95.

2. $p(X \in [13 ; 26]) \approx 0,994$ donc

$p(X \in [13 ; 26]) \geq 0,99$: $[13 ; 26]$ est un intervalle de fluctuation au risque de 1 %.

74. La variable aléatoire X donnant le nombre de « 100 m » courus en moins de 13 s suit la loi binomiale de paramètres $n = 61$ et $p = 0,94$.

a) $p(53 \leq X \leq 60) \approx 0,968$ donc $p(53 \leq X \leq 60) \geq 0,95$ donc oui.

b) $p(X < 59) \approx 0,717$ donc $p(X < 59) < 0,95$ donc non.

c) $p(X > 53) \approx 0,971$ donc $p(X > 53) \geq 0,95$ donc oui.

d) $p(X \leq 57) \approx 0,502$ donc $p(X \leq 57) < 0,95$ donc non.

Vérification qu'un intervalle est un intervalle de fluctuation centré

75. 1. Ici, $\alpha = 0,05$ donc $\frac{\alpha}{2} = 0,025$.

$p(X < 18) \approx 0,022$ et $p(X > 35) \approx 0,021$

donc $p(X < 18) \leq 0,025$ et $p(X > 35) \leq 0,025$:

$[18 ; 35]$ est bien un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 %.

2. Ici, $\alpha = 0,01$ donc $\frac{\alpha}{2} = 0,005$.

$p(X < 15) \approx 0,003$ et $p(X > 38) \approx 0,004$ donc
 $p(X < 15) \leq 0,005$ et $p(X > 38) \leq 0,005$:

$[15 ; 38]$ est bien un intervalle de fluctuation centré au risque de 1 %.

76. 1. Ici, $\alpha = 0,05$ donc $\frac{\alpha}{2} = 0,025$.

$p(Y < 9) \approx 0,016$ et $p(Y > 21) \approx 0,028$ donc
 $p(Y > 21) > 0,025$: $[9 ; 21]$ n'est pas un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 %.

2. a) Ici, $\alpha = 0,1$ donc $\frac{\alpha}{2} = 0,05$. $p(Y < 10) \approx 0,035$ et

$p(Y > 21) \approx 0,028$ donc $p(Y < 10) \leq 0,05$ et $p(Y > 21) \leq 0,05$: $[10 ; 21]$ est un intervalle de fluctuation centré au seuil de 90 %.

b) $p(Y < 9) < p(Y < 10)$ donc $p(Y < 9) \leq 0,05$ et
 $p(Y > 22) < p(Y > 21)$ donc $p(Y > 22) \leq 0,05$ donc
 $[9 ; 22]$ est un intervalle de fluctuation centré au seuil de 90 % donc au risque de 10 %.

Exercices d'entraînement p. 387-391

Successions d'épreuves

77. 1. La ligne permet de définir une liste dont :

- le 1^{er} élément est un entier aléatoire entre 2 et 4 ce qui correspond au 1^{er} tirage ;
- le 2^e élément est un entier aléatoire entre 2 et 5 ce qui correspond au 2^e tirage ;
- le 3^e élément est un entier aléatoire entre 2 et 6 ce qui correspond au 3^e tirage.

Le « tirage » de chaque élément de la liste n'a pas d'influence sur les autres donc c'est une succession de trois épreuves indépendantes.

Remarque : for i in range(1,4) correspond à « pour i allant de 1 à 3 ».

2. $\{2 ; 3 ; 4\} \times \{2 ; 3 ; 4 ; 5\} \times \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

3. On cherche $p(\{2 ; 3 ; 4\}) = p(2) \times p(3) \times p(4)$
 $= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{60}$.

$$78. 1. p(0) = \frac{15}{315} = \frac{1}{21}$$

$$\text{et } p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = \frac{60}{315} = \frac{4}{21}.$$

2. a) $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}^5$

$$\text{b) } p(\{2 ; 4 ; 3 ; 3 ; 0\}) = p(2) \times p(4) \times p(3) \times p(3) \times p(0) \\ = \left(\frac{4}{21}\right)^4 \times \left(\frac{1}{21}\right) \approx 0,000\,063$$

$$79. 1. 0,7 \times 0,35 \times 0,38 \times 0,59 \approx 0,055$$

$$2. 0,7 \times 0,65 \times 0,62 \times 0,41 \approx 0,116$$

3. Soit t ce taux de réussite sous forme décimale.

On a $0,7 \times 0,65 \times 0,38 \times 0,59 \times t = 0,07$ donc $t \approx 0,69$ soit un taux de réussite d'environ 69 %.

$$4. L = [0,7, 0,65, 0,38, 0,59, 0,69]$$

80. 1. On considère les événements :

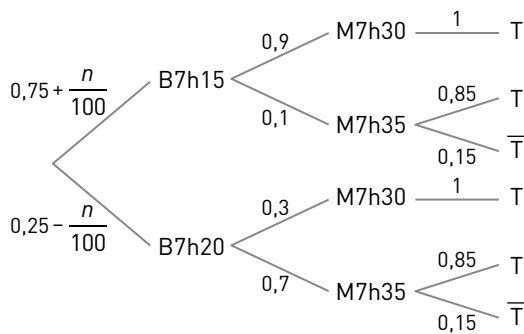
- B7h15 : « elle a le bus de 7h15 » ;
- B7h20 : « elle a le bus de 7h20 » ;
- M7h30 : « elle a le métro de 7h30 » ;
- M7h35 : « elle a le métro de 7h35 » ;
- T : « elle arrive à l'heure ».

On a alors :



$$2. p(T) = 0,75 \times 0,9 \times 1 + 0,75 \times 0,1 \times 0,85 \\ + 0,25 \times 0,3 \times 1 + 0,25 \times 0,7 \times 0,85 = 0,9625$$

3. Si elle se lève n minutes plus tôt, l'arbre devient :



Il s'agit donc de résoudre $p(T) \geq 0,98$ avec

$$p(T) = \left(0,75 + \frac{n}{100}\right) \times 0,9 \times 1 + \left(0,75 + \frac{n}{100}\right) \times 0,1 \times 0,85 \\ + \left(0,25 - \frac{n}{100}\right) \times 0,3 \times 1 + \left(0,25 - \frac{n}{100}\right) \times 0,7 \times 0,85$$

$$= 0,9625 + \frac{0,09n}{100} \text{ soit } 0,9625 + \frac{0,09n}{100} \geq 0,98$$

$$\Leftrightarrow 96,25 + 0,09n \geq 98$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{98}{0,09} \text{ avec } \frac{98}{0,09} \approx 19,4 \text{ donc il faut qu'elle se}$$

lève au moins 20 minutes plus tôt.

Loi binomiale

81. Les différentes simulations réalisées avec la fonction `bernoulli` sont indépendantes et `L` est une liste de taille n constituée de 1, correspondant à un succès, avec une probabilité p et de 0, correspondant à un échec, avec une probabilité $1 - p$.

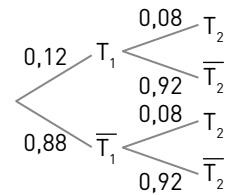
La somme des éléments de `L`, renvoyée par la fonction `binomiale`, donne donc bien le nombre de succès lorsque l'on réalise n fois de manière indépendante une même expérience de Bernoulli de paramètre p donc elle simule une variable aléatoire suivant la loi $B(n; p)$.

82. 1. On considère qu'un bit mal transmis est un succès, sa probabilité est $p = 0,01$. X donne donc bien le nombre de succès lorsque l'on réalise $n = 8$ fois de manière indépendante la même expérience de Bernoulli de paramètre $p = 0,01$ donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0,01$.

2. $p(X = 2) \approx 0,003$

3. $p(X \geq 3) \approx 0,00005$ ce qui paraît en effet négligeable.

83. 1. On appelle T_1 l'événement « le produit défectueux passe le 1^{er} test » et T_2 l'événement « le produit défectueux passe le 2^e test ». On a alors :



La probabilité qu'un produit défectueux soit mis en vente est donc $0,12 \times 0,08 = 0,0096$.

2. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de produits défectueux mis en vente parmi ces 100. X suit la loi $B(100; 0,0096)$.

On cherche $p(X \geq 3) \approx 0,072$.

84. 1. Les $n = 5$ éléments de la liste sont des entiers aléatoires entre 1 et 10 générés indépendamment et on considère que le résultat obtenu est un succès s'il est inférieur ou égal à 6, la probabilité d'un succès est donc $p = 0,6$.

X donne bien le nombre de succès lorsque l'on réalise $n = 5$ fois de manière indépendante la même expérience de Bernoulli de paramètre $p = 0,6$ donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,6$.

2.

```
import random
L=[random.randint(1, 10) for i in range(5)]
T=[]
for a in L:
    if a<7:
        T.append(1)
    else:
        T.append(0)
```

Utiliser l'expression de $p(X = 0)$ ou $p(X = k)$

85. 1. $p(X = n) = 0,25^n$

On résout donc $0,25^n = 9,5 \times 10^{-7}$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,25) = \ln(9,5 \times 10^{-7})$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{\ln(9,5 \times 10^{-7})}{\ln(0,25)} \text{ donc } n = 10.$$

2. $p(X = 0) = 0,75^n$

On résout donc $0,75^n = 0,0001$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,75) = \ln(0,0001)$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{\ln(0,0001)}{\ln(0,75)} \text{ donc } n = 32.$$

86. 1. $p(Y = 0) = 0,56^n$.

On résout donc $0,56^n < 10^{-5} \Leftrightarrow n \ln(0,56) < \ln(10^{-5})$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(10^{-5})}{\ln(0,56)} \text{ donc la valeur cherchée est } n = 20.$$

2. $p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - 0,56^n$

On résout donc $1 - 0,56^n > 0,99 \Leftrightarrow 0,56^n < 0,01$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,56) < \ln(0,01) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,56)} \text{ donc la}$$

valeur cherchée est $n = 8$.

87. 1. $p(Z = n) = 0,89^n$

On résout donc $0,89^n > 0,01 \Leftrightarrow n \ln(0,89) > \ln(0,01)$

$$\Leftrightarrow n < \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,89)} \text{ donc la valeur cherchée est } n = 39.$$

2. $p(Z < n) = 1 - p(Z = n) = 1 - 0,89^n$

On résout donc $1 - 0,89^n > 0,75 \Leftrightarrow 0,89^n < 0,25$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,89) < \ln(0,25) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,25)}{\ln(0,89)} \text{ donc la}$$

valeur cherchée est $n = 12$.

88. On appelle n le nombre d'obstacles mis dans le niveau et X la variable aléatoire donnant le nombre d'obstacles touchés. En admettant tous les obstacles indépendants, X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,05$.

On cherche à résoudre $p(X = 0) > 0,5 \Leftrightarrow 0,95^n > 0,5$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,95) > \ln(0,5) \Leftrightarrow n < \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)} \text{ donc } n \leq 13 :$$

elle pourra mettre au maximum 13 fois cet obstacle.

89. 1. On appelle n le nombre de parties jouées et X la variable aléatoire donnant le nombre de parties gagnées. Comme tous les tirages sont indépendants, X suit la loi binomiale de paramètres n

$$\text{et } p = \frac{1}{19\,068\,840}.$$

On cherche à résoudre $p(X \geq 1) \geq 0,01$

$$\Leftrightarrow 1 - p(X = 0) \geq 0,01 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{19\,068\,839}{19\,068\,840} \right)^n \geq 0,01$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{19\,068\,839}{19\,068\,840} \right)^n \leq 0,99$$

$$\Leftrightarrow n \ln \left(\frac{19\,068\,839}{19\,068\,840} \right) \leq \ln(0,99)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,99)}{\ln \left(\frac{19\,068\,839}{19\,068\,840} \right)} \text{ donc } n \geq 191\,649.$$

Remarque : On pourra faire remarquer aux élèves qu'il faut déjà un nombre énorme de parties pour avoir ne serait-ce qu'une toute petite chance (supérieure à 1 %) de gagner !

2. Il y a 52 semaines dans une années soit 156 tirages.

On calcule $\frac{191\,649}{156} \approx 1229$ donc il faudrait jouer à

tous les tirages pendant environ 1 229 années pour avoir 1 (tout petit) % de chance de gagner le gros lot.

Comparaisons de lois binomiales

90. 1. • Le gain algébrique au premier jeu est -5 avec une probabilité 0,55 et 5 avec une probabilité 0,45 donc l'espérance de gain au 1^{er} jeu est $-5 \times 0,55 + 5 \times 0,45 = -0,5$.

• Le gain algébrique au 2^e jeu est -2 avec une probabilité 0,82 et 8 avec une probabilité 0,18 donc l'espérance de gain au 2^e jeu est $-2 \times 0,82 + 8 \times 0,18 = -0,2$.

On perd donc moins d'argent avec le 2^e jeu.

2. 20 tickets du premier jeu et 50 du deuxième.

3. a) • G_1 suit la loi $B(20 ; 0,45)$ donc

$$E(G_1) = 20 \times 0,45 = 9.$$

• G_2 suit la loi $B(50 ; 0,18)$ donc $E(G_2) = 50 \times 0,18 = 9$.

Cela veut donc dire que si l'on reproduit cette expérience un grand nombre de fois (achat de 20 tickets du premier jeu ou de 50 du deuxième jeu), en moyenne, on a 9 tickets gagnants pour les deux jeux.

$$\text{b) } \sigma(G_1) = \sqrt{20 \times 0,55 \times 0,45} \approx 2,2$$

et $\sigma(G_2) = \sqrt{50 \times 0,18 \times 0,82} \approx 2,7$ donc il est un peu plus risqué d'acheter 50 tickets du deuxième jeu car les valeurs fluctuent légèrement plus autour de 9 (il y aura donc plus souvent des valeurs éloignées de 9, en dessous ou au-dessus).

c) On rentre dans ses frais si $G_1 \geq 10$ ou $G_2 \geq 10$ (puisque l'on a dépensé 100 € et que le gain pour un ticket gagnant est 10 € dans les deux cas).

On calcule :

- $p(G_1 \geq 10) \approx 0,409$;
- $p(G_2 \geq 10) \approx 0,412$;

donc il est légèrement plus probable de rentrer dans ses frais en achetant 50 tickets du 2^e jeu.

91. • T suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,6$.

• R suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,8$.

a) • $p(T \geq 10) \approx 0,872$;

• $p(R \geq 10) \approx 0,939$;

donc si 10 répétitions sont nécessaires, il faut privilégier Rob.

b) • $p(T \geq 15) \approx 0,126$;

• $p(R \geq 15) \approx 0,035$;

donc si 15 répétitions sont nécessaires, il faut privilégier Tristane (mais dans les deux cas, ces événements sont improbables).

92. • On appelle X le nombre de postures manquées à l'épreuve 1 : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,5$.

• On appelle Y le nombre de postures manquées à l'épreuve 2 : Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,1$.

1. • $p(X \leq 3) \approx 0,172$

• $p(Y \leq 3) \approx 0,25$

donc on doit plutôt choisir l'épreuve 2.

2. • $p(X \leq 7) \approx 0,945$

• $p(Y \leq 7) \approx 0,878$

donc on doit plutôt choisir l'épreuve 1.

Déterminer un entier k avec $p(X \leq k)$

93. a) 15

b) 34

94. a) 20

b) 31

95. 1. F suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,36$.

On tabule $x \mapsto p(F \leq x)$ et on obtient que le plus petit entier k tel que $p(F \in [0 ; k]) \geq 0,95$ c'est-à-dire $p(F \leq k) \geq 0,95$ est 11.

2. $\frac{11}{20} = 0,55$ donc :

on peut être sûr au seuil de 95 % que la fréquence de FACE obtenus sera inférieure ou égale à 55 %.

96. 1.

```
def cumul_binomiale (n, p, k) :
    proba = 0
    for i in range (k+1) :
        proba = proba + proba_binomiale (n, p, i)
    return proba
```

2.

```
def seuil_binomiale (n, p, s) :
    i = 0
    while cumul_binomiale (n, p, i) <= s :
        i = i+1
    return i
```

Déterminer un entier k avec $p(X \geq k)$

97. a) $p(X \geq k) > 0,9 \Leftrightarrow p(X \leq k-1) < 0,1$

On trouve $k-1 = 30$ puis $k = 31$.

b) $p(X \geq k) \geq 0,05 \Leftrightarrow p(X \leq k-1) \leq 0,95$

On trouve $k-1 = 38$ puis $k = 39$.

98. 1. $p(Y \geq k) > 0,99 \Leftrightarrow p(Y \leq k-1) < 0,01$

On trouve $k-1 = 3$ puis $k = 4$.

2. $p(Y \geq k') \leq 0,02 \Leftrightarrow p(Y \leq k'-1) \geq 0,98$

On trouve $k'-1 = 16$ puis $k' = 17$.

99. 1. J suit la loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0,35$.

On cherche le plus grand k tel que $p(J \geq k) \geq 0,99 \Leftrightarrow p(J \leq k-1) \leq 0,01$.

On tabule $x \mapsto p(J \leq x)$ et on obtient $k-1 = 6$ soit $k = 7$.

2. $\frac{7}{40} = 0,175$ donc :

on peut être sûr au seuil de 99 % que la fréquence de boules jaunes obtenues sera supérieure ou égale à 17,5 %.

Déterminer un intervalle de fluctuation centré

100. On tabule $k \mapsto p(X \leq k)$:

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP					
APP SUR + POUR ΔTb1					
X	Y1				
1	0.0131				
2	0.0513				
3	0.1345				
4	0.268				
5	0.4353				
6	0.6065				
7	0.7533				
8	0.8608				
9	0.9292				
10	0.9675				
11	0.9865				
X=1					

donc [2 ; 11] est un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % (car $p(X \leq 2) > 0,025$ et $p(X \leq 11) \geq 0,975$).

101. On tabule $k \mapsto p(Y \leq k)$:

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP					
APP SUR + POUR ΔTb1					
X	Y1				
41	0.0016				
42	0.0027				
43	0.0045				
44	0.0072				
45	0.0111				
46	0.0169				
47	0.0249				
48	0.0359				
49	0.0506				
50	0.0695				
51	0.0934				
X=49					

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP					
APP SUR + POUR ΔTb1					
X	Y1				
70	0.9458				
71	0.9604				
72	0.9716				
73	0.98				
74	0.9862				
75	0.9906				
76	0.9938				
77	0.9959				
78	0.9974				
79	0.9984				
80	0.999				
X=80					

donc [44 ; 77] est un intervalle de fluctuation centré au risque de 1 % (car $p(X \leq 44) > 0,005$ et $p(X \leq 77) \geq 0,995$).

102. 1. P suit la loi binomiale de paramètres $n = 25$ et $p = \frac{5}{11}$.

On tabule $k \mapsto p(P \leq k)$:

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP					
APP SUR + POUR ΔTb1					
X	Y1				
6	0.0232				
7	0.0584				
8	0.1244				
9	0.2283				
10	0.3668				
11	0.5242				
12	0.6773				
13	0.8048				
14	0.8959				
15	0.9516				
16	0.9806				
X=16					

donc [7 ; 16] est un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % (car $p(X \leq 7) > 0,025$ et $p(X \leq 16) \geq 0,975$).

2. La fréquence de nombres pairs sur les 25 tirages est donc comprise entre $\frac{7}{25}$ soit 28 % et $\frac{16}{25}$ soit 64 %, au risque de 5 %.

Problèmes de seuil

103. Soit X le nombre de ces 237 élèves qui se présenteront effectivement à la cantine.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 237$ et $p = 0,93$.

1. On cherche à trouver le plus petit entier k tel que $p(X \leq k) \geq 0,95$ (ou $p(X > k) \leq 0,05$ ce qui est équivalent) : la calculatrice donne $k = 227$: il faut prévoir au minimum 227 repas.

2. On cherche à trouver le plus petit entier k tel que $p(X \leq k) \geq 0,99$ (ou $p(X > k) \leq 0,01$ ce qui est équivalent) : la calculatrice donne $k = 229$: il faut prévoir au minimum 229 repas.

104. Soit X le nombre de cartons jaunes reçus sur les 38 matchs.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 38$ et $p = 0,15$.

1. On cherche la plus petite valeur de n entière telle que $p(X \leq n) \geq 0,99$: la calculatrice donne $n = 11$.

2. On cherche la plus petite valeur de n entière telle que $p(X > n) < 0,10$ c'est-à-dire $p(X \leq n) > 0,9$: la calculatrice donne $n = 9$.

105. 1. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes comptant voter pour F. Fillon dans l'échantillon.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,200$ 1 et $F = \frac{X}{1000}$ donc le problème revient à

trouver le plus petit intervalle de fluctuation de X de la forme $[0 ; k]$ au seuil de 99 %.

La calculatrice donne $[0 ; 230]$ pour plus petit intervalle de fluctuation de X de la forme $[0 ; k]$ au seuil de 99 % c'est-à-dire que $[0 ; 0,23]$ est le plus petit intervalle de fluctuation de F de la forme $[0 ; k]$ au seuil de 99 %.

2. On a vu que normalement, un sondage sur 1 000 personnes devrait donner au maximum 23 % d'intentions de vote à F. Fillon, au seuil de 95 %.

- Pour les sondages de 2016, il y a donc un souci car non pas un (cela pourrait arriver dans la multitude de sondages) mais la plupart des sondages donnent un score, 25 %, très largement au-dessus des 23 % : ces sondages ne sont pas représentatifs, on peut penser qu'ils ont été faits trop tôt et n'ont donc que peu de valeur.
- Pour les sondages à partir de 2017, on ne peut rien dire, cela semble cohérent (on pourrait donner un intervalle de fluctuation centré pour discuter du 17 %) donc ces sondages semblent pertinents.

106. 1. On considère la variable aléatoire X donnant le nombre d'atomes de carbone 14 présents après 11 460. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100\,000$ et $p = 0,25$.

On tabule $k \mapsto p(X \leq k)$:

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP					
APP SUR + POUR ΔTb1					
X	Y1				
0	0				
10000	0				
20000	0				
30000	1				
40000	1				
50000	1				
60000	1				
70000	1				
80000	1				
90000	1				
100000	1				

X=0

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP					
APP SUR + POUR ΔTb1					
X	Y1				
20000	0				
21000	0				
22000	0				
23000	2E-49				
24000	1E-13				
25000	0.5017				
26000	1				
27000	1				
28000	1				
29000	1				
30000	1				

X=20000

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP					
APP SUR + POUR ΔTb1					
X	Y1				
24000	1E-13				
24100	2E-11				
24200	2.3E-9				
24300	1.5E-7				
24400	5.7E-6				
24500	1.3E-4				
24600	0.0017				
24700	0.0143				
24800	0.0725				
24900	0.2338				
25000	0.5017				

X=24000

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP					
APP SUR + POUR ΔTb1					
X	Y1				
24700	0.0143				
24710	0.0172				
24720	0.0205				
24730	0.0244				
24740	0.0289				
24750	0.0341				
24760	0.04				
24770	0.0468				
24780	0.0544				
24790	0.0629				
24800	0.0725				

X=24700

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP					
APP SUR + POUR ΔTb1					
X	Y1				
24730	0.0244				
24731	0.0248				
24732	0.0253				
24733	0.0257				
24734	0.0262				
24735	0.0266				
24736	0.0271				
24737	0.0275				
24738	0.028				
24739	0.0285				
24740	0.0289				

X=24730

Donc $a = 24\,732$.
On procède de même pour b ;

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP				
APP SUR + POUR MODIF FONCTION				
X	Y1			
25260	0.9713			
25261	0.9718			
25262	0.9723			
25263	0.9727			
25264	0.9732			
25265	0.9736			
25266	0.9741			
25267	0.9745			
25268	0.975			
25269	0.9754			
25270	0.9758			
Y1=0.97495099555186				

donc $b = 25\,269$.

Ainsi, l'intervalle $[24\,732 ; 25\,269]$ est un intervalle de fluctuation centré du nombre d'atomes restants, au seuil de 95 %.

2. Au départ, il y avait $100\,000 \times 10^{12} = 10^{17}$ atomes de carbones 12 pour 100 000 atomes de carbone 14. Comme ils ne se désintègrent pas, il en reste 10^{17} pour entre 24 732 et 25 269 c'est-à-dire entre $4,04 \times 10^{12}$ et $3,96 \times 10^{12}$ atomes de carbone 12 pour un atome de carbone 14 c'est-à-dire autour de 4×10^{12} .

Trouver n ou p

107. 1. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes prenant le vol pour n billets vendus.

X suit la loi binomiale de paramètres n (inconnu) et $p = 0,91$.

On tabule $n \mapsto p(X \leq 180)$ (en partant de 180) avec les instructions :

- $Y1 = \text{binomFRép}(X, 0.91, 180)$ (TI) ;
- $Y1 = \text{BinomialCD}(180, x, 0.91)$ (casio) ;
- $f(x) = \text{binomcdf}(180, x, 0.91)$ (numworks).

On obtient :

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP				
APP SUR + POUR ΔTb1				
X	Y1			
184	1			
185	0.9998			
186	0.9995			
187	0.9984			
188	0.9958			
189	0.9902			
190	0.9798			
191	0.9619			
192	0.934			
193	0.8938			
194	0.8401			
X=194				

donc pour 191 billets vendus, la probabilité que le nombre de personnes prenant effectivement le vol soit inférieur ou égal à 180 [c'est-à-dire que tout

le monde puisse prendre place dans l'avion) est environ 0,96 donc supérieure ou égale à 0,95.

2. C'est la même question avec 0,99 au lieu de 0,95 donc on peut vendre 189 billets.

108. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de chocs reçus sur 15 000 obstacles.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 15\,000$ et p inconnu.

On cherche à trouver p tel que $p(X > 3\,000) < 0,03$ c'est-à-dire $p(X \leq 3\,000) > 0,97$.

On tabule $p \mapsto p(X \leq 3\,000)$ (d'abord avec un pas de 0,1 puis un pas de 0,01, etc.) avec les instructions :

- $Y1 = \text{binomFRép}(15000, X, 3000)$ (TI) ;
- $Y1 = \text{BinomialCD}(3000, 15000, x)$ (casio) ;
- $f(x) = \text{binomcdf}(3000, 15000, x)$ (numworks).

On obtient :

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP				
APP SUR + POUR ΔTb1				
X	Y1			
0.19	0.9991			
0.191	0.9974			
0.192	0.9936			
0.193	0.9852			
0.194	0.9688			
0.195	0.9398			
0.196	0.8931			
0.197	0.8249			
0.198	0.7344			
0.199	0.6251			
0.2	0.5049			
X=0.2				

donc $p \approx 0,193$.

Tests d'hypothèses

109. 1. C suit la loi binomiale de paramètres $n = 600$ et $p = 0,8$.

2. $[461 ; 499]$

3. a) On s'attendait à un nombre de contrats entre 461 et 499 donc le nombre de 550 est nettement plus élevé.

b) On peut penser que cette affirmation est fausse, au risque d'erreur de 5 %.

110. 1. G suit la loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0,9$.

2. Un intervalle de fluctuation centré de G au seuil de 95 % est $[348 ; 371]$ donc un intervalle de fluctuation centré de $\frac{G}{400}$ au seuil de 95 % est

$\left[\frac{348}{400} ; \frac{371}{400} \right]$ c'est-à-dire $[0,87 ; 0,9275]$.

3. On s'attendait à entre 87 % et 92,75 % de patients guéris et il y en a 87,5 % ce qui est bien entre 87 % et 92,75 %. On ne peut donc pas douter du pourcentage d'efficacité annoncé.

111. 1. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,03$.
On trouve $[0 ; a] = [0 ; 43]$.
2. $39 \in [0 ; 43]$ donc le taux de défaut est dans la fourchette attendue, au seuil de 99 %.

112. 1. a) X suit la loi binomiale de paramètres $n = 600$ et $p = \frac{1}{3}$ donc il peut « espérer » avoir
 $E(X) = 600 \times \frac{1}{3} = 200$ plans homozygotes.

- b) $[178 ; 223]$
- c) $201 \in [178 ; 223]$ donc rien ne permet de remettre en cause sa théorie. On peut néanmoins s'interroger sur le fait que la valeur trouvée, 201, soit aussi proche de la valeur « idéale » 200.
2. a) X suit la loi binomiale de paramètres $n = 600$ et $p = 0,37$ donc il peut « espérer » avoir
 $E(X) = 600 \times 0,37 = 222$ plans homozygotes.
- b) $[199 ; 245]$
- c) $201 \in [199 ; 245]$ donc rien ne permet de remettre en cause sa théorie.

3. Le nombre de plans homozygotes trouvés, 201, est très proche du nombre que Mendel pensait idéal, 200, mais beaucoup moins de celui « réellement idéal », 222. On a donc pu penser que Mendel avait truqué ses résultats afin d'avoir un résultat quasi parfait et ainsi valider sa théorie.

Remarque : On pourra faire remarquer aux élèves que l'expérience de Mendel est facilement reproductible et que tout(e) scientifique (muni(e) du matériel nécessaire) peut reproduire l'expérience afin de vérifier s'il ou elle trouve des résultats compatibles avec la théorie de Mendel. Cette notion de reproductibilité d'expérience est au cœur de la méthode scientifique.

113. Pour la première partie (réflexion des élèves), toutes les réponses sont valables.
- La solution de Pascal est la suivante :
- Le perdant de la première manche aurait gagné le jeu, donc 64 pistoles, s'il avait gagné les suivantes c'est-à-dire avec une probabilité

de $0,5^2 = 0,25$, son espérance de gain est donc $0,25 \times 64 + 0,75 \times 0 = 16$.

- Le gagnant de la première manche aurait gagné le jeu dans les autres cas, c'est-à-dire avec une probabilité de 0,75, son espérance de gain est donc $0,75 \times 64 + 0,25 \times 0 = 48$.

Pascal propose donc de répartir les gains ainsi : 48 pistoles pour le gagnant de la première manche et 16 pistoles pour le perdant de la première manche.

114. Travail de l'élève.

La première chose à remarquer est que cela va diminuer le nombre de lancers et donc accélérer le jeu (ce qui est sans doute la raison principale de cette mesure).

Allons un peu plus loin en prenant deux typologies de joueurs.

❶ Un joueur avec un bon pourcentage de réussite au lancer franc, par exemple 85 %.

• Avec la nouvelle mesure, on a :

Nombre de points	0	2
Probabilité	0,15	0,85

D'après la calculatrice, il peut espérer marquer 1,7 point avec un écart-type d'environ 0,71.

• Avec l'ancienne mesure, on a :

Nombre de points	0	1	2
Probabilité	$0,15^2 = 0,0225$	$0,15 \times 0,85 + 0,85 \times 0,15 = 0,255$	$0,85^2 = 0,7225$

D'après la calculatrice, il peut espérer marquer 1,7 point avec un écart-type d'environ 0,5.

❷ Un joueur avec un mauvais pourcentage de réussite au lancers francs, par exemple 50 %.

- Avec la nouvelle mesure, pour un lancer à 2 points, on a :

Nombre de points	0	2
Probabilité	0,5	0,5

La calculatrice donne qu'il peut espérer marquer 1 point avec un écart-type de 1.

- Avec l'ancienne mesure, pour un lancer à 2 points, on a :

Nombre de points	0	1	2
Probabilité	$0,5^2 = 0,25$	$0,5 \times 0,5 + 0,5 \times 0,5 = 0,5$	$0,5^2 = 0,25$

La calculatrice donne qu'il peut espérer marquer 1 point avec un écart-type d'environ 0,71.

On voit que dans les deux cas, l'espérance est la même et que l'écart-type est plus grand avec la nouvelle mesure ce qui veut dire que les valeurs sont globalement plus éloignées de l'espérance avec cette nouvelle mesure : le jeu est « plus risqué ».

On pourra aussi remarquer que si le lancer-franc a lieu sur la dernière action et que les deux équipes sont à égalité, dans le cas :

❶ la probabilité de passer devant pour l'équipe obtenant le lancer franc est 0,85 avec la nouvelle mesure contre $0,255 + 0,7225 = 0,9775$ avec l'ancienne mesure ;

❷ la probabilité de passer devant pour l'équipe obtenant le lancer franc est 0,5 avec la nouvelle mesure contre $0,5 + 0,25 = 0,75$ avec l'ancienne mesure.

Exercices bilan

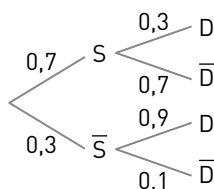
p. 392

115. La pêche à la ligne

A. Épreuves non indépendantes

1. Le fait qu'il aille pêcher le samedi a de l'influence sur le fait qu'il y aille le dimanche donc les deux épreuves ne sont pas indépendantes.

2. On appelle S l'événement « il va à la pêche samedi » et D l'événement « il va à la pêche dimanche ». On a l'arbre :



$$p(S \cup D) = 0,7 \times 0,3 + 0,7 \times 0,7 + 0,3 \times 0,9 = 0,97$$

B. Épreuves indépendantes

1. $\Omega = \{S; T; B\}^{10}$

$$\begin{aligned} 2. p((S; S; S; S; S; S; T; T; B; B; B)) &= p(S)^5 \times p(T)^2 \times p(B)^3 \\ &= 0,4^5 \times 0,35^2 \times 0,25^3 \\ &= 0,000\,019\,6 \end{aligned}$$

C. Loi binomiale

1. X suit la loi binomiale si toutes les prises sont indépendantes. Dans ce cas, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,2$.

2. $m = 50 \times 0,2 = 10$ et $p(X > 10) \approx 0,416$.

3. $p(X < 20) \approx 0,9991$ donc oui.

4. $[5; 16]$

116. Taux de satisfaction

1. On cherche le plus grand a tel que $p(X \geq a) \geq 0,95 \Leftrightarrow p(X \leq a - 1) \leq 0,05$.

On trouve $a - 1 = 971$ puis $a = 972$.

2. $974 \in [972; 1\,000]$ donc il n'y a pas de raison de douter du taux de satisfaction affiché par l'agence de voyage.

117. Gestion des réservations

Soit n le nombre de réservations total. Le nombre de personnes venant chercher le smartphone est modélisé par une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres n (inconnu) et $p = 0,9$.

Il s'agit de trouver le plus grand entier n tel que $p(X \leq 500) \geq 0,95$.

On tabule à l'aide de la calculatrice et on trouve $n = 543$: on peut accepter 43 réservations supplémentaires.

118. Choisir son podcast

1. P_1 suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,9$ donc, en moyenne, il y a $E(P_1) = 10 \times 0,9 = 9$ titres qui lui plaisent dans le podcast 1.

P_2 suit une loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = 0,75$ donc, en moyenne, il y a $E(P_2) = 12 \times 0,75 = 9$ titres qui lui plaisent dans le podcast 2.

2. $p(7 \leq P_1 \leq 9) \approx 0,639$ et $p(8 \leq P_2 \leq 11) \approx 0,811$.

3. $p(P_1 \geq 8) \approx 0,93$ et $p(P_2 \geq 8) \approx 0,842$ donc elle doit privilégier le podcast 1.

119. Probabilité de gagner

1. La probabilité de n'obtenir aucune fois PILE est la probabilité de n'obtenir que FACE soit $0,5^n$ pour n lancers.

Il s'agit de résoudre $0,5^n < 10^{-9}$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,5) < -9 \ln(10)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{-9 \ln(10)}{\ln(0,5)} \text{ donc il faut jouer au moins 30 fois.}$$

2. Soit p la probabilité d'obtenir PILE. On a alors $p + 4p = 1 \Leftrightarrow p = 0,2$ et la probabilité d'obtenir FACE est 0,8.

La probabilité de n'obtenir aucune fois PILE est la probabilité de n'obtenir que FACE soit $0,8^n$ pour n lancers.

Il s'agit de résoudre $0,8^n < 10^{-9}$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,8) < -9 \ln(10)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{-9 \ln(10)}{\ln(0,8)} \text{ donc il faut jouer au moins 93 fois.}$$

Préparer le BAC Je me teste p. 394

120. B 121. C

122. D 123. B

124. C 125. A

126. B 127. B

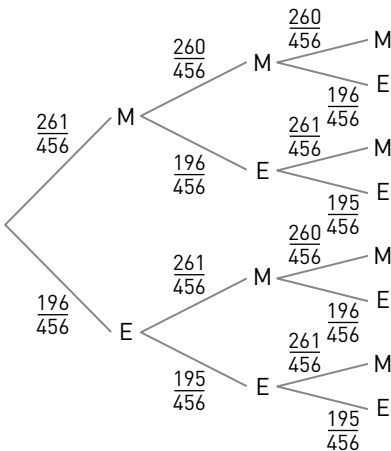
128. B

Préparer le BAC Je révise p. 395

129. Épreuves indépendantes

A. 1. Non car le titre joué ne peut pas être rejoué à l'étape d'après : le résultat d'une épreuve a donc de l'influence sur la suivante.

2.



3. a) $\frac{261}{457} \times \frac{196}{456} \times \frac{195}{456} + \frac{196}{457} \times \frac{261}{456} \times \frac{196}{456} \times \frac{195}{456} \times \frac{261}{456}$

$\approx 0,315$ (4^e, 6^e et 7^e chemins).

b) On peut faire le calcul direct ou remarquer que c'est la probabilité que le téléphone joue 2 ou 3 titres électro soit

$$\frac{261}{457} \times \frac{196}{456} \times \frac{195}{456} + \frac{196}{457} \times \frac{261}{456} \times \frac{196}{456} + \frac{196}{457} \times \frac{195}{456} \times \frac{261}{456} + \frac{196}{457} \times \frac{196}{456} \times \frac{195}{456} \approx 0,394.$$

B. 1. Oui.

2. $\{M; E\}^5$

3. $p(\{M; E; E; E; M\}) = p(M)^2 \times p(E)^3$
 $= \left(\frac{261}{457}\right)^2 \times \left(\frac{196}{457}\right)^3 \approx 0,026$

4. $p(\{M; E; E; E; E\}) = p(E; M; E; E; E)$
 $= p(M)^1 \times p(E)^4$
 $= \left(\frac{261}{457}\right) \times \left(\frac{196}{457}\right)^4 \approx 0,019$

5. Introduisons la variable aléatoire X donnant le nombre de titres « métal » joués.

X suit la binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{261}{457}$.

On cherche donc :

- $p(X = 1) \approx 0,097$;
- $p(2 \leq X \leq 4) \approx 0,828$.

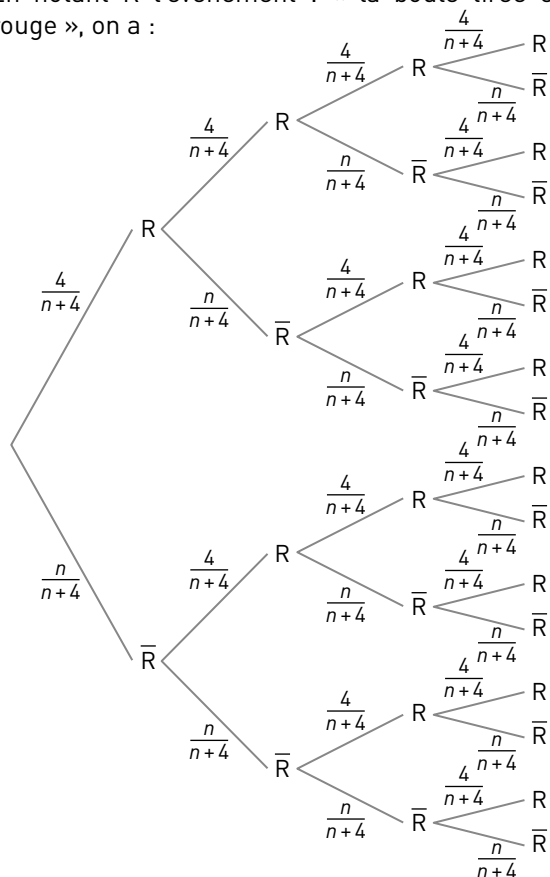
6.

```
def cinq_titres() :  
    L=[]  
    for i in range(5) :  
        if random.randint(1,457) <= 261 :  
            L.append("Métal")  
        else :  
            L.append("Electro")  
    return L
```

130. Une urne

1. Le tirage est avec remise donc, en considérant que l'obtention d'une boule rouge est un succès (par exemple), on répète 4 fois de manière indépendante une même expérience de Bernoulli donc cette succession d'épreuves est bien un schéma de Bernoulli.

En notant R l'événement : « la boule tirée est rouge », on a :



2. q_n est la probabilité de l'événement contraire de « aucune boule n'est noire » donc $q_n = 1 - \left(\frac{4}{n+4}\right)^4$.

3. $1 - \left(\frac{4}{n+4}\right)^4 \geq 0,9999 \Leftrightarrow 0,0001 \geq \left(\frac{4}{n+4}\right)^4$
donc $n \geq 36$.

131. Seuil et intervalle de fluctuation centré

1. D suit la loi binomiale de paramètres $n=1\ 500$ et $p=0,02$.

$p(D \leq 44) \approx 0,994$ donc oui.

2. a) [20 ; 41]

b) Non car $40 \in [20 ; 41]$.

132. Problème de seuil

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes (supposées indépendantes) n'aimant pas le livre dans le club. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 236$ et $p = 0,15$.

On cherche le plus petit entier k tel que $p(X > k) \leq 0,01 \Leftrightarrow p(X \leq k) \geq 0,99$ donc $k = 49$.

Exercices vers le supérieur p. 396-397

133. La bonne martingale ?

A. Loi géométrique

1. a) 0,49

b) • Elle quitte le casino après 2 parties si elle perd puis gagne c'est-à-dire avec une probabilité $0,51 \times 0,49 = 0,2499$.

• Elle quitte le casino après 3 parties si elle perd puis perd puis gagne c'est-à-dire avec une probabilité $0,51^2 \times 0,49 = 0,127449$.

• Elle quitte le casino après k parties si elle perd successivement $k-1$ fois puis gagne c'est-à-dire avec une probabilité $0,51^{k-1} \times 0,49$.

c) $p(X = k) = 0,51^{k-1} \times 0,49$

2. a) Elle gagne 1 000 €.

b) • Elle perd 1 000 € puis gagne 2 000 € donc elle gagne 1 000 € au total.

• Elle perd 1 000 € puis perd 2 000 € puis gagne 4 000 € donc elle gagne 1 000 € au total.

c) On peut conjecturer qu'elle gagne toujours 1 000 €.

3. a) $u_n = 1\ 000 \times 2^{n-1}$

b) La somme mise sur les n premières parties est

$$1\ 000 \times \frac{1-2^n}{1-2} = 1\ 000 \times (2^n - 1) = 1\ 000 \times 2^n - 1\ 000$$

(somme des termes d'une suite géométrique).

On gagne le double de la dernière mise c'est-à-dire $2 \times 1\ 000 \times 2^{n-1} = 1\ 000 \times 2^n$ donc le gain algébrique est

$$1\ 000 \times 2^n - (1\ 000 \times 2^n - 1\ 000) = 1\ 000 \text{ quel que soit le nombre de parties jouées.}$$

4. a) G prend la valeur 1 000 avec une probabilité 1.

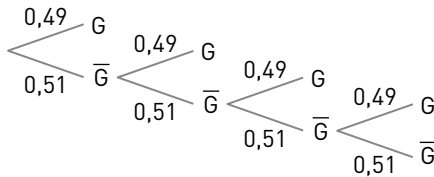
b) Cela paraît paradoxal car avec cette méthode, on gagne 1 000 € à coup sûr.

En réalité, ça ne l'est pas tant que ça car on manque assez rapidement d'argent pour réaliser cette stratégie. Par exemple, après 10 parties, on a misé $1\ 000 \times 2^{10} - 1\ 000 = 1\ 023\ 000$ €.

B. Loi géométrique tronquée

1. On résout $1\,000 \times 2^n - 1\,000 = 15\,000$ et on trouve $n = 4$ donc elle ne pourra miser que pendant 4 parties (si elle ne gagne pas avant).

2. a)



b) On a :

y_i	0	1	2	3	4
$p(Y = y_i)$	$0,51^4 \approx 0,068$	0,49	$0,51 \times 0,49 \approx 0,25$	$0,51^2 \times 0,49 \approx 0,127$	$0,51^3 \times 0,49 \approx 0,065$

c) On a :

g_i	-15 000	1 000
$p(G' = g_i)$	$0,51^4 \approx 0,068$	$1 - 0,51^4 \approx 0,932$

$$E(G') = -15\,000 \times 0,51^4 + 1\,000 \times (1 - 0,51^4) \approx -82 \text{ €}$$

3. • On résout $100 \times 2^n - 100 = 15\,000$ et on trouve $n \approx 7,2$ donc elle ne pourra miser que pendant 7 parties et cela lui coûte 12 700 €.

• Pour k entier entre 1 et 7, on a $p(Y = k) = 0,51^{k-1} \times 0,49$ et $p(Y = 0) = 0,51^7$.

• On a :

g_i	-12 700	100
$p(G' = g_i)$	$0,51^7 \approx 0,009$	$1 - 0,51^7 \approx 0,991$

$$E(G') = -12\,700 \times 0,51^7 + 100 \times (1 - 0,51^7) \approx -15 \text{ €}$$

4. Avec la deuxième stratégie, on réduit les pertes en moyenne mais le gain est également moindre.

Remarque : On pourrait calculer les écarts-types pour constater que la première stratégie est plus risquée.

134. Intervalle de fluctuation centré

1. $p(X \in [a' ; b']) = 1 - (p(X < a') + p(X > b'))$

$$\text{or } p(X < a') + p(X > b') \leq 2 \times \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{soit } p(X < a') + p(X > b') \leq \alpha$$

$$\Rightarrow -[p(X < a') + p(X > b')] \geq -\alpha$$

$$\text{puis } p(X \in [a' ; b']) = 1 - \alpha.$$

2. a) Pour a entier non nul,

$$p(X < a) = p(X \leq a - 1) \text{ or } a \text{ est le plus petit entier tel}$$

$$\text{que } p(X \leq a) > \frac{\alpha}{2} \text{ donc } p(X \leq a - 1) \leq \frac{\alpha}{2} \text{ c'est-à-dire}$$

$$\text{dire } p(X < a) \leq \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{b) } p(X > b) = 1 - p(X \leq b) \text{ or } p(X \leq b) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow -p(X \leq b) \leq -1 + \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow 1 - p(X \leq b) \leq \frac{\alpha}{2} \text{ c'est-à-dire } p(X > b) \leq \frac{\alpha}{2}.$$

3. On a montré à la question 1 que si $p(X < a') \leq \frac{\alpha}{2}$

$$\text{et } p(X > b') \leq \frac{\alpha}{2} \text{ alors } [a' ; b'] \text{ est bien un intervalle}$$

de fluctuation au seuil de $1 - \alpha$.

Comme les deux nombres a et b définis à la question 2. vérifient les conditions demandées à la question 1., $[a ; b]$ est bien un intervalle de fluctuation centré au seuil de $1 - \alpha$ qui est centré d'après les questions 2. a) et 2. b).

135. Influence de p sur l'écart-type

1. La fonction racine carrée est croissante donc cette fonction, appelons la f , a les mêmes variations que la fonction $p \mapsto p(1 - p) = -p^2 + p$ qui est

croissante sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$

donc :

p	0	$\frac{1}{2}$	1
f	0	$\frac{1}{2}$	0

2. La courbe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 0,5$ car $f(0,5 - p) = f(0,5 + p)$.

3. Pour n fixé :

$$\bullet \sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)} = \sqrt{n} \times \sqrt{p(1 - p)}$$

$$\bullet \sigma(X') = \sqrt{np'(1-p')} = \sqrt{n} \times \sqrt{p'(1-p')}$$

De $|0,5 - p| < |0,5 - p'|$, on déduit que p est moins éloigné de 0,5 que p' donc que $\sqrt{p(1-p)} > \sqrt{p'(1-p')}$

(par symétrie) c'est-à-dire que $\sigma(X) > \sigma(X')$.

136. Test d'hypothèses

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes touchées par la maladie dans l'échantillon.

Si l'hypothèse de 15 % est correcte, en considérant toutes ces personnes indépendantes, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,15$.

D'après la calculatrice, un intervalle de fluctuation centré de X au seuil de 95 % est $[20 ; 40]$.

Comme $25 \in [20 ; 40]$, on ne rejette pas l'hypothèse.

137. Probabilité et loi binomiale

1. La probabilité d'obtenir k succès en $n+1$ essais est la somme de la probabilité d'obtenir $k-1$ succès en n essais puis 1 succès au $(n+1)$ -ième essai et de la probabilité d'obtenir k succès en n essais puis 1 échec au $(n+1)$ -ième essai c'est-à-dire $p(X_{n+1} = k)$

$= p(X_n = k-1) \times p + p(X_n = k) \times (1-p)$ (on peut faire un arbre pour s'en convaincre si ce n'est pas clair).

2. a) • $p(X_n = 0)$ est la probabilité de n'avoir que des échecs en n essais c'est-à-dire $(1-p)^n$ et $\binom{n}{0}$

$\times p^0 \times (1-p)^{n-0} = (1-p)^n$ ce qui justifie l'égalité dans le cas $k = 0$.

• $p(X_n = n)$ est la probabilité de n'avoir que des succès en n essais c'est-à-dire p^n et $\binom{n}{n} \times p^n \times (1-p)^{n-n}$

$= p^n$ ce qui justifie l'égalité dans le cas $k = n$.

b) On considère la proposition

« $p(X_n = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$ pour tout k entier entre 0 et n ».

Initialisation : si $n = 1$ alors X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre p donc

• $p(X_1 = 0) = 1 - p$ et

$$\binom{1}{0} \times p^0 \times (1-p)^{1-0} = 1 - p \text{ également ;}$$

• $p(X_1 = 1) = p$ et $\binom{1}{1} \times p^1 \times (1-p)^{1-1} = p$ également.

La proposition est vraie au rang 1.

Hérédité : supposons la proposition vraie à un rang $n \geq 1$ (hypothèse de récurrence) et montrons qu'elle est alors vraie au rang $n+1$.

• Pour tout k compris entre 0 et n , on a :

$$p(X_{n+1} = k) = p(X_n = k-1) \times p + p(X_n = k) \times (1-p).$$

$$\text{Or } p(X_n = k-1) \times p = \binom{n}{k-1} \times p^{k-1} \times (1-p)^{n-(k-1)} \times p$$

$$= \binom{n}{k-1} \times p^k \times (1-p)^{n-k+1} = \binom{n}{k-1} \times p^k \times (1-p)^{n+1-k}$$

$$\text{et } p(X_n = k) \times (1-p) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} \times (1-p)$$

$$= \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n+1-k}.$$

$$\text{Ainsi, } p(X_{n+1} = k) = \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) \times p^k \times (1-p)^{n+1-k}$$

$$= \binom{n+1}{k} \times p^k \times (1-p)^{n+1-k}.$$

• Pour $k = n+1$, la proposition est vraie d'après la question 2. a.

On vient de montrer que si la proposition est vraie au rang n , alors elle est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : La proposition est vraie au rang 1 et est héréditaire donc, pour tout entier n non nul,

$$p(X_n = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} \text{ pour tout } k \text{ entier entre 0 et } n.$$

138. Espérance de la loi binomiale

1.

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1)!}{k \times (k-1)! \times ((n-1)-(k-1))!} \\ &= \frac{n}{k} \times \frac{(n-1)!}{(k-1)! \times ((n-1)-(k-1))!} = \frac{n}{k} \times \binom{n-1}{k-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. p(X_n = k) \times k &= \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} \times k \\ &= \frac{n}{k} \times \binom{n-1}{k-1} \times k \times p \times p^{k-1} \times (1-p)^{n-1-(k-1)} \\ &= np \times p(Y = k-1) \end{aligned}$$

$$3. a) E(X) = 0 + np \times p(Y=0) + \dots + np \times p(Y=n-1) = np[p(Y=0) + \dots + p(Y=n-1)] \text{ (d'après 2.)}$$

$$b) E(X) = np \times 1 = np$$

139. Relation de Panjer

$$A. 1. p(N = k) = \frac{(k-2)a}{k} \times p(N = k-1).$$

Pour $k = 2$, on a $\frac{(k-2)a}{k} = 0$ donc $p(N = 2) = 0$ puis

$p(N = k) = 0$ par récurrence immédiate pour tout $k \geq 2$.

2. N prend pour valeur 0 et 1 avec des probabilités différentes de 0 et 1 donc N suit une loi de Bernoulli.

On a $p(N = 1) = -a \times p(N = 0)$.

Comme $p(N = 0) + p(N = 1) = 1$, on déduit que

$$(1-a)p(N = 0) = 1 \Leftrightarrow a = 1 - \frac{1}{p(N = 0)}.$$

$$\begin{aligned} B. 1. \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!(n+1-k)}{k \times (k-1)! \times (n+1-k)!} \\ &= \frac{n+1-k}{k} \times \frac{n!}{(k-1)! \times (n-(k-1))!} \\ &= \frac{n+1-k}{k} \times \binom{n}{k-1} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} p(Z = k) &= \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n+1-k}{k} \times \\ &= \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times p(Z = k-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} &= \frac{p}{1-p} \times \frac{-k}{k} + \frac{n+1}{k} \\ &= \frac{p}{1-p} \times \left(-1 + \frac{n+1}{k}\right) \\ &= -\frac{p}{1-p} + \frac{\frac{p}{1-p} \times (n+1)}{k} \end{aligned}$$

On a donc bien une relation de Panjer avec

$$a = -\frac{p}{1-p} < 1 \text{ et } b = \frac{p}{1-p} \times (n+1)$$

(notons que $p(Z = 0) \neq 1$ pour une loi binomiale).

140. Loi de Poisson

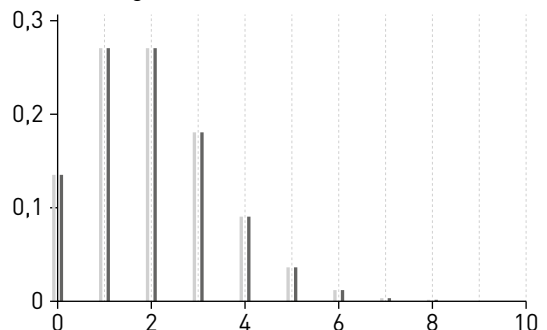
1. a)

X	Y1				
0	0.1353				
1	0.2707				
2	0.2707				
3	0.1804				
4	0.0902				
5	0.0361				
6	0.012				
7	0.0034				
8	8.6E-4				
9	1.9E-4				
10	3.8E-5				

X=0

$p(X = k) < 0,01$ à partir de $k = 7$.

b) On a : (en gris clair ci-dessous)



c) $0 \times 0,14 + 1 \times 0,27 + 2 \times 0,27 + \dots + 7 \times 0,034 \approx 2$
donc on peut penser que l'espérance associée à une loi de Poisson de paramètre λ est λ .

2. a)

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP				
APP SUR + POUR ΔTb1				
X	Y1			
0	0.1351			
1	0.2707			
2	0.2709			
3	0.1806			
4	0.0902			
5	0.036			
6	0.012			
7	0.0034			
8	8.5E-4			
9	1.9E-4			
10	3.7E-5			

X=0

En gris soutenu sur le graphique précédent.

b) Pour Y , n est assez grand (1 000) et un succès est assez rare (probabilité 0,002 c'est-à-dire une chance sur 500) et $E(Y) = 2$ donc la probabilité d'obtenir k succès, $p(Y = k)$ est proche de $p(X = k)$ où X suit une loi de Poisson de paramètre $E(Y)$, ce que l'on a bien constaté sur les graphiques.

3. a) Appelons X la variable aléatoire suivant une loi binomiale (on suppose les billets indépendants) donnant le nombre de faux billets reçus sur le total des billets en notre possession dans une vie.

On ne connaît pas les paramètres de cette loi mais on sait que :

- le nombre total de billets que l'on a en sa possession en une vie est très grand ;
- la probabilité qu'un billet soit faux est très petite ;
- comme on nous dit qu'en moyenne, on en reçoit 3, cela veut dire que $E(X) = 3$.

Toutes les conditions sont réunies pour approximer X par une variable aléatoire Y suivant une loi de Poisson de paramètre 3.

b) On approxime $p(X > 4)$ par

$$p(Y > 4) = 1 - \frac{3^0}{0!}e^{-3} - \frac{3^1}{1!}e^{-3} - \frac{3^2}{2!}e^{-3} - \frac{3^3}{3!}e^{-3} - \frac{3^4}{4!}e^{-3} \approx 0,185.$$

141. Déénombrer avec les probabilités

1. Si on considère la variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,5$ alors

$$p(X = k) = \binom{n}{k} \times 0,5^k \times 0,5^{n-k} = \binom{n}{k} \times 0,5^n.$$

Ainsi l'expression dans l'énoncé est

$$p(X = 0) + p(X = 1) + \dots + p(X = n) = 1.$$

2. En multipliant par 2^n les deux membres de l'égalité précédente, on obtient l'égalité souhaitée.

Travaux pratiques

p. 398-401

TP 1. Calculatrice et loi binomiale

• **Durée estimée :** 10 min

• **Objectif :** Utiliser la calculatrice pour calculer directement des probabilités de la forme $p(X = k)$ et $p(X \leq k)$.

Activité de l'élève.

TP 2. Choisir le bon nombre

• **Durée estimée :** 55 min

• **Objectif :** Travailler la programmation autour d'un problème de seuil.

1. a) $f(3) = 6$ et $f(6) = 720$.

b) $f(n) = n!$

c) ...

2.

```
def k_parmi_n(k, n):
    return f(n)/(f(k)*f(n-k))
```

3.

```
def proba_binom(n, p, k):
    return k_parmi_n(k, n)*p**k*(1-p)**(n-k)
```

4. a) $p(X > k) \leq \alpha \Leftrightarrow 1 - p(X \leq k) \leq \alpha$
 $\Leftrightarrow p(X \leq k) \geq 1 - \alpha$

b)

```
def seuil(n, p, alpha):
    proba = proba_binom(n, p, 0)
    k = 0
    while proba < 1-alpha:
        k = k+1
        proba = proba + proba_binom(n, p, k)
    return k
```

5. `seuil(10, 0.3, 0.05)` renvoie 5, ce qui doit normalement correspondre à la plus petite valeur de k telle que $p(X \leq k) \geq 0,95$ où X suit la loi $B(10; 0,3)$.

En tabulant $k \mapsto p(X \leq k)$, où X suit la loi $B(10 ; 0,3)$, on obtient :

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP				
APP SUR + POUR ΔTb1				
X	Y1			
0	0.0282			
1	0.1493			
2	0.3828			
3	0.6496			
4	0.8497			
5	0.9527			
6	0.9894			
7	0.9984			
8	0.9999			
9	1			
10	1			

X=0

et on retrouve bien cette valeur $k = 5$.

6. a) Pour chaque personne ayant réservé une place, on considère que c'est un succès si elle se rend effectivement au concert. N donne donc le nombre de succès lorsque l'on réalise $n = 543$ fois de manière indépendante la même expérience de Bernoulli avec la probabilité d'un succès $p = 0,97$ donc N suit la loi binomiale de paramètres $n = 543$ et $p = 0,97$.

b) $p(N > 530) \approx 0,17$ ce qui correspond à la probabilité qu'il manque des fauteuils si l'artiste prévoit 530 places.

c) $p(N > 540) \approx 0,00001$ donc le risque qu'il manque des places si elle prévoit 540 fauteuils est inférieur à 1 % (de l'ordre de 0,001 %).

d) `seuil(543,0.97,0.01)` doit donner la réponse : il renvoie 535.

TP 3. Un train bien rempli

- **Durée estimée :** 40 min
- **Objectif :** Simuler avec Python.

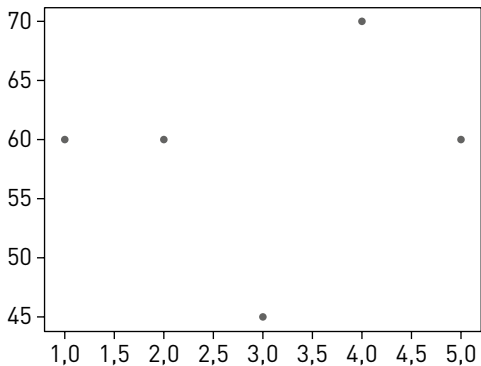
```
1. def simul_tarif():
    p=random.random()
    if p<=0.37:
        tarif=45
    if p>0.37 and p<=0.68:
        tarif=60
    if p>0.68 and p<=0.9:
        tarif=70
    if p>0.9:
        tarif=85
    return tarif
```

2. ...

3. a) Les entiers de 1 à 100.

b) 100 tarifs de billets simulés à l'aide de la fonction `simul_tarif`.

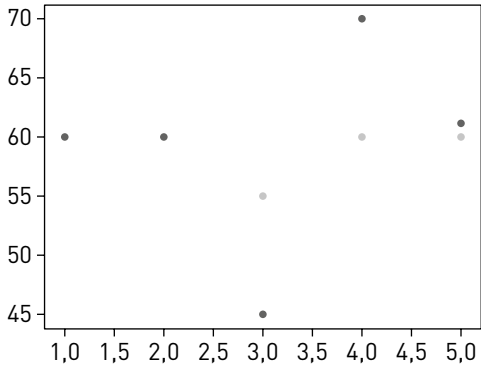
4. a)



b) Les commandes exécutées sont successivement :

```
plt.plot([1],[60], 'b.')
plt.plot([2],[60], 'b.')
plt.plot([3],[55], 'b.')
plt.plot([4],[58.75], 'b.')
plt.plot([5],[59], 'b.')
```

On obtient donc (les premiers points en gris foncé, ou rouge, et gris clair, ou bleu, sont superposés)



5. ...

6. a) De 60 environ.

b) Cette valeur correspond au tarif moyen qui doit se rapprocher de :

$$E(X) = 45 \times 0,37 + 60 \times 0,31 + 70 \times 0,22 + 85 \times 0,1 = 59,15.$$

TP 4. La planche de Galton

- **Durée estimée :** 40 min
- **Objectif :** Répondre au problème d'entrée de chapitre avec les connaissances acquises sur la loi binomiale.

A. Avec 3 étages

1. a) 5 € puis 10 €.
- b) Dans les 3 cas (il va tout le temps à droite sauf une fois qui peut être à l'étage 1, 2 ou 3), il finit dans le réceptacle à 10 €.
2. a) En admettant que le fait qu'il aille à droite ou à gauche à un étage n'a pas d'influence sur le fait qu'il aille à droite ou à gauche aux autres, c'est-à-dire que les directions sont indépendantes à chaque étage, et en considérant qu'un succès est l'événement « le palet va à gauche » alors X donne le nombre de succès quand on réalise $n = 3$ fois de manière indépendante la même expérience de Bernoulli de paramètre $p = 0,5$ donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,5$.
- b) $p(X=0)=p(X=3)=0,125$ et $p(X=1)=p(X=2)=0,375$.

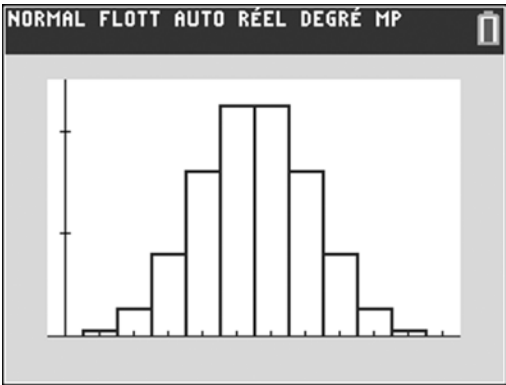
```
3. import random
gauche = 0
for i in range(3):
    if random.random() <= 0.5 :
        gauche = gauche + 1
    if gauche == 0 :
        print("500 euros")
    if gauche == 1 :
        print("10 euros")
    if gauche == 2 :
        print("5 euros")
    if gauche == 3 :
        print("1000 euros")
```

4.

g_i	1000	5	10	500
$p(G = g_i)$	0,125	0,375	0,375	0,125

B. Avec 11 étages

1. Il y a 11 étages donc 1 clou au-dessus, puis 2 clous, etc. puis 11 clous à l'étage le plus bas ce qui correspond à 12 façons de tomber (un réceptacle à gauche de chacun des clous et un à droite du dernier).
2. a) ...
- b) La loi binomiale.
3. a) Si la boule va 0 fois à droite, elle se retrouve dans le réceptacle 0 ; si elle va 1 fois à droite elle se retrouve dans le réceptacle 1 ; etc. Le numéro du réceptacle dans lequel finit la bille est donc donné par le nombre de fois où la bille va aller à droite sur les 11 clous qu'elle va rencontrer : R suit la loi binomiale de paramètres $n = 11$ et $p = 0,5$.
- b) Avec la calculatrice (graduations tous les 1 en abscisse et 0,1 en ordonnée).



- c) On retrouve la forme caractéristique de la répartition des billes observée dans la vidéo.
4. C'est le phénomène de fluctuation d'échantillonnage.