



Nom et prénom :

Exercice 1.**8 points**

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres 40 et 0,3.

Donner les résultats à 10^{-3} près.

1. Calculer en mettant en évidence l'expression de calcul : $p(X = 5)$.
2. A l'aide de la calculatrice, calculer $p(X = 4)$ et $p(X = 12)$.
3. A l'aide de la calculatrice, calculer $p(X \leq 1)$ et $p(X \geq 18)$.
4. Déterminer k telque $p(X \leq k) \geq 0,95$.
5. Déterminer l'espérance et l'écart type de la variable aléatoire X .

Correction

1. Pour rappel : $p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Alors $p(X = 5) = \binom{40}{5} \times 0,3^5 \times (1-0,3)^{40-5} = 658008 \times 0,3^5 \times 0,7^{35} \approx 0,006$

2. $p(X = 4) \approx 0,002$ et $p(X = 12) \approx 0,137$

3. $p(X \leq 6) \approx 0,024$ et $p(X \geq 12) = 1 - p(X \geq 11) \approx 0,559$

4. on cherche k telque $p(X \leq k) \geq 0,95$

d'après la calculatrice $p(X \leq 16) \approx 0,937$ et $p(X \leq 17) \approx 0,968$

donc le plus petit entier est $k = 17$ telque $p(X \leq k) \geq 0,95$

5. $E(X) = n \times p = 40 \times 0,3 = 12$ l'espérance est de 12

$V(X) = n \times p(1-p) = 40 \times 0,3 \times (1-0,3) = 8,4$ la variance est de 8,4

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{8,4} \approx 2,898$ l'écart type est 2,90

**Exercice 2.**

2 points

1. Déterminer la solution générale de l'équation $y' + 3y = 0$.
2. Déterminer la solution unique vérifiant la condition initiale : $y(0) = 4$.

Correction

$$1. y' + 3y = 0 \Leftrightarrow y' = -3y$$

Donc la forme générale : $y(x) = K e^{-3x}, K \in \mathbb{R}$

$$2. \text{ La solution générale de l'équation est : } y = K e^{-3x}$$

$$\text{Or } y(0) = 4 \Rightarrow K e^0 = 4 \Rightarrow K = 4$$

$$\text{Donc } y(x) = 4e^{-3x}$$

Exercice 3.

3 points

1. Déterminer la solution générale de l'équation $y' - 5y = 2$.
2. Déterminer la solution unique vérifiant la condition initiale : $y(0) = 1$.

Correction

$$1. y' - 5y = 2 \Leftrightarrow y' = 5y + 2$$

Alors une fonction constante est solution particulière de l'équation

$$\text{Si } y = c, c \in \mathbb{R} \text{ alors } y' = 0 \text{ d'où } 0 = 5c + 2 \text{ donc } c = -\frac{2}{5}$$

$$\text{Donc la forme générale : } y(x) = K e^{5x} - \frac{2}{5}, K \in \mathbb{R}$$

$$2. \text{ La solution générale de l'équation est : } y = K e^{5x} - \frac{2}{5}$$

$$\text{Or } y(0) = 1 \Rightarrow K e^0 - \frac{2}{5} = 1 \Rightarrow K = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$$

$$\text{Donc } y = \frac{7}{5} e^{5x} - \frac{2}{5}$$

**Exercice 4.**

3,5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (6x + 1)e^{3x+1}$

1. Déterminer les nombres a et b tels que la fonction g , définie sur $\mathbb{R}$, par $g(x) = (ax + b)e^{3x+1}$ soit une primitive de f .
2. En déduire la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = e$.

Correction

1. On doit chercher a et b telque F soit une primitive de f , càd telque $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

On a $g(x) = (ax + b)e^{3x+1}$

Alors la fonction g , définie sur $\mathbb{R}$, par est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonction qui le sont

$$\text{D'où } g = u \times v \quad \text{et} \quad g' = u'v + uv' \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u(x) = ax + b & \text{et} & u'(x) = a \\ v(x) = e^{3x+1} & \text{et} & v'(x) = 3e^{3x+1} \end{cases}$$

$$\text{Alors } g'(x) = ae^{3x+1} + (ax + b) \times 3e^{3x+1} = (3ax + 3b + a)e^{3x+1}$$

$$\text{Comme } g'(x) = f(x) \Leftrightarrow (3ax + 3b + a)e^{3x+1} = (6x + 1)e^{3x+1}$$

$$\text{Par identification terme à terme} \quad \begin{cases} 3a = 6 \\ 3b + a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 3b + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 3b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Donc on trouve l'expression de g : $g(x) = \left(2x - \frac{1}{3}\right)e^{3x+1}$ telque g soit une primitive de f

2. On sait que toutes les primitives de f sont égales à une constante près

D'où $F(x) = g(x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{On peut chercher } k \text{ puisque } F(0) = e & \Leftrightarrow \left(2 \times 0 - \frac{1}{3}\right)e^{3 \times 0 + 1} + k = e \\ & \Leftrightarrow -\frac{1}{3}e + k = e \Leftrightarrow k = e + \frac{1}{3}e \Leftrightarrow k = \frac{4}{3}e \Leftrightarrow k = \frac{4e}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } F(x) = \left(2x - \frac{1}{3}\right)e^{3x+1} + \frac{4e}{3}$$

**Exercice 5.**

3,5 points

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 9x^2 - 6x + 1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}$.

Déterminer l'ensemble des primitives de f sur $]0; +\infty[$.

Correction

On a la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 9x^2 - 6x + 1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}$

La fonction f est continue sur $]0; +\infty[$

Alors $f(x) = 9 \times x^2 - 6 \times x + 1 + 3 \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

D'où l'ensemble des primitives sera de la forme :

$$F_k(x) = 9 \times \frac{1}{3}x^3 - 6 \times \frac{1}{2}x^2 + x + 3 \times \ln(x) + \frac{-1}{x} + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$F_k(x) = \frac{9}{3}x^3 - \frac{6}{2}x^2 + x + 3 \times \ln(x) - \frac{1}{x} + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$F_k(x) = 3x^3 - 3x^2 + x + 3\ln(x) - \frac{1}{x} + k, \quad k \in \mathbb{R}$$