Nom et prénom : ....

Exercice 1.

Deux joueurs Alain et Bernard s'affrontent dans un tournoi de tennis. Alain et Bernard jouent 9 matchs. La probabilité qu'Alain gagne un match est $0,6$. Le vainqueur est celui qui gagne le plus de matchs.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de matchs gagnés par Alain.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Quelle est la probabilité qu'Alain gagne exactement 2 matchs ? (mettre en évidence l'expression utilisée et donner le resultat à 10^{-4} près)
3. Quelle est la probabilité qu'Alain gagne au moins 3 matchs ? (donner le resultat à 10^{-3} près)
4. Ecrire l'événement « Alain gagne le tournoi » à l'aide de X puis calculer sa probabilité et conclure.
5. En moyenne, sur 9 matchs, combien Alain peut-il gagner de matchs ?

Correction

1. Les matchs étant identiques et leurs résultats indépendants

   De plus, il n'y a que deux issues possibles : gagner ou non

   Donc $\boxed{\text{le nombre X de matchs gagnés par Alain suit donc une loi binomiale de paramètres 9 et 0,6}}$
2. $p(X=2) = \binom{9}{2} \times 0,6^2 \times (1-0,6)^7 \approx 0,0212$

   $\boxed{\text{Sur 9 matchs, la probabilité qu'Alain gagne exactement 2 matchs est d'environ 0,0212}}$
3. $P(X \geq 3) = 1 - p(X < 3) = 1 - p(X \leq 2) \approx 0,975$

   $\boxed{\text{Sur 9 matchs, la probabilité qu'Alain gagne au moins 3 matchs est d'environ 0,975}}$
4. Alain gagne le tournoi si il gagne au moins 5 matchs, donc si l'événement « $p(X \geq 5)$ est réalisé

   D'après la caluclatrice, $p(X \geq 5) \approx 0,733$

   Donc $\boxed{\text{la probabilité qu'Alain gagne le tournoi est d'environ 0,267}}$
5. $E(X) = 9 \times 0,6 = 5,4$

   $\boxed{\text{En moyenne, Alain gagne 5,4 matchs sur les 9}}$

Exercice 2. On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres 50 et $0,3$.
A l'aide de la caluclatrice, à 10^{-3} près,

1. calculer $p(X = 18)$ et $p(X = 22)$
2. calculer $p(X \leq 15)$ et $p(X \geq 10)$
3. determiner k telque $p(X \leq k) \geq 0,95$
4. determiner l'éspérance et l'ecart type de la variable aléatoire X

Correction

1. $p(X = 18) \approx 0,077$ et $p(X = 22) \approx 0,013$
2. $p(X \leq 15) \approx 0.569$ et $p(X \geq 10) = 1 - p(X \leq 9) \approx 0.96$
3. on cherche k telque $p(X \leq k) \geq 0,95$

   d'après la calculatrice $p(X \leq 19) \approx 0,915 < 0,95$ et $p(X \leq 20) \approx 0,952 \geq 0,95$

   donc le plus petit entier est 20 telque $p(X \leq k) \geq 0,95$
4. $E(x) = n \times p = 50 \times 0,3 = 15$ l'espérance est de 15

   $V(X) = np(1-p) = 50 \times 0,3 \times (1-0,3) = 10,5$ la variance est de $10,5$

   $\sigma(X) = sqrt(V(X)) = sqrt(10,5) \approx 3,24$ l'ecart type est $3,24$