Nom et prénom : ....

Exercice 1. 8 points

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres 30 et $0,2$.

Donner les résultats à 10^{-3} près.

1. Calculer en mettant en evidence l'expression de calcul : $p(X=5)$.
2. A l'aide de la calculatrice, calculer $p(X=3)$ et $p(X=10)$.
3. A l'aide de la calculatrice, calculer $p(X \leq 1)$ et $p(X \geq 18)$.
4. Déterminer k telque $p(X \leq k) \geq 0,95$.
5. Déterminer l'éspérance et l'ecart type de la variable aléatoire X.

Correction

1. Pour rapel : $p(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

   Alors $p(X=5) = \binom{30}{5} \times 0,2^5 \times (1-0,2)^{30-5} = 142506 \times 0,2^5 \times 0,8^{25} \approx 0,172$
2. $p(X=3) \approx 0,079$ et $p(X=10) \approx 0,035$
3. $p(X \leq 6) \approx 0,607$ et $p(X \geq 12) = 1 - p(X \geq 11) \approx 0,009$
4. on cherche k telque $p(X \leq k) \geq 0,95$

   d'après la calculatrice $p(X \leq 9) \approx 0,939$ et $p(X \leq 10) \approx 0,974$

   donc $\boxed{\text{le plus petit entier est } k = 10 \text{ telque } p(X \leq k) \geq 0,95}$
5. $E(X) = n \times p = 30 \times 0,2 = 6$ $\boxed{\text{l'espérance est de } 6}$

   $V(X) = n \times p(1-p) = 30 \times 0,2 \times (1-0,2) = 4,8$ la variance est de $4,8$

   $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{4,8} \approx 2,191$ $\boxed{\text{l'ecart type est } 2,19}$

Exercice 2. 2 points

1. Déterminer la solution générale de l'équation $y' + 4y = 0$.
2. Déterminer la solution unique vérifiant la condition initiale : $y(0) = 5$.

Correction

1. $y' + 4y = 0 \Leftrightarrow y' = -4y$

   Donc la forme générale : $\boxed{y(x) = \mathrm{K}\,e^{-4x},\ \mathrm{K} \in \mathbb{R}}$

2. La solution générale de l'équation est : $y = \mathrm{K}\,e^{-4x}$

   Or $y(0) = 5 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{K}e^0 = 5 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{K} = 5$

   Donc $\boxed{y(x) = 5e^{-4x}}$

Exercice 3. 3 points

1. Déterminer la solution générale de l'équation $y' - 3y = 5$.
2. Déterminer la solution unique vérifiant la condition initiale : $y(0) = 1$.

Correction

1. $y' - 3y = 5 \Leftrightarrow y' = 3y + 5$

   Alors une fonction constante est solution particulière de l'équation

   Si $y = c$, $c \in \mathbb{R}$ alors $y' = 0$ d'où $0 = 3c + 5$ donc $c = -\dfrac{5}{3}$

   Donc la forme générale : $\boxed{y(x) = \mathrm{K}\,e^{3x} - \dfrac{5}{3},\ \mathrm{K} \in \mathbb{R}}$

2. La solution générale de l'équation est : $y = \mathrm{K}\,e^{3x} - \dfrac{5}{3}$

   Or $y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{K}\,e^0 - \dfrac{5}{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{K} = 1 + \dfrac{5}{3} = \dfrac{8}{3}$

   Donc $\boxed{y = \dfrac{8}{3}e^{3x} - \dfrac{5}{3}}$

Exercice 4. 3,5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (4x+3)e^{2x+1}$.

1. Déterminer les nombres a et b tels que la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$, par $g(x) = (ax+b)e^{2x+1}$ soit une primitive de f.
2. En déduire la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $\mathrm{F}(0) = e$.

<u>Correction</u>

1. On doit chercher a et b telque F soit une primitive de f, càd telque $\mathrm{F}'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

   On a $g(x) = (ax+b)e^{2x+1}$

   Alors la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$, par est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonction qui le sont

   D'où $g = u \times v \quad$ et $\quad g' = u'v + uv' \quad$ avec $\begin{cases} u(x) = ax+b \quad \text{et} \quad u'(x) = a \\ v(x) = e^{2x+1} \quad \text{et} \quad v'(x) = 2e^{2x+1} \end{cases}$

   Alors $g'(x) = ae^{2x+1} + (ax+b) \times 2e^{2x+1} = (2ax+2b+a)e^{2x+1}$

   Comme $g'(x) = f(x) \quad \Leftrightarrow (2ax+2b+a)e^{2x+1} = (4x+3)e^{2x+1}$

   Par identification terme à terme $\begin{cases} 2a = 4 \\ 2b+a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 2b+2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

   Donc $\boxed{\text{on trouve l'expression de } g : g(x) = \left(2x + \frac{1}{2}\right)e^{2x+1} \text{ telque } g \text{ soit une primitive de } f}$

2. On sait que toutes les primitves de f sont égales à une constante près

   D'où $\mathrm{F}(x) = g(x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

   On peut chercher k puisque $\mathrm{F}(0) = e \quad \Leftrightarrow \quad \left(2 \times 0 + \frac{1}{2}\right)e^{2\times 0+1} + k = e$

   $\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}e + k = e \quad \Leftrightarrow \quad k = e - \frac{1}{2}e \quad \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}e \quad \Leftrightarrow k = \frac{e}{2}$

   Donc $\boxed{\mathrm{F}(x) = \left(2x + \frac{1}{2}\right)e^{2x+1} + \frac{e}{2}}$

Exercice 5. 3,5 points

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 6x^2 - 8x + 1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}$.

Déterminer l'ensemble des primitives F_k de la fonction f.

Correction

On a la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 6x^2 - 8x + 1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

La fonction f est continue sur $]0;+\infty[$

Alors $f(x) = 6 \times x^2 - 8 \times x + 1 + 2 \times \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

D'où l'ensemble des primitives sera de la forme :

$$\mathrm{F}_k(x) = 6 \times \frac{1}{3}x^3 - 8 \times \frac{1}{2}x^2 + x + 2 \times \ln(x) + \frac{-1}{x} + k,\ k \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{F}_k(x) = \frac{6}{3}x^3 - \frac{8}{2}x^2 + x + 2 \times \ln(x) - \frac{1}{x} + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\mathrm{F}_k(x) = 2x^3 - 4x^2 + x + 2\ln(x) - \frac{1}{x} + k, \quad k \in \mathbb{R}}$$