Probabilités conditionnelles

Dans tout ce chapitre, Ω désigne l'univers des possibles soit l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.

Pour tout E événement de Ω, on note $P(E)$ la probabilité de E.

On rappelle qu'un événement est de probabilité nulle si et seulement si c'est un événement impossible :

$$P(E) = 0 \Longleftrightarrow E = \emptyset$$

I Probabilité conditionnelle

Propriété 1 : Probabilité de B sachant A

Soit A un événement de Ω étant de probabilité non nulle $(P(A) \neq 0)$.

La fonction f qui a tout événement B associe $f(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, définit une probabilité sur Ω.

Autrement dit,

- Pour tout événement B, $0 \leq f(B) \leq 1$
- $f(\Omega) = 1$
- Si B_1 et B_2 sont deux événements tels que $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ (on dira dans ce cas que B_1 et B_2 sont incompatibles ou disjoints), alors $f(B_1 \cup B_2) = f(B_1) + f(B_2)$

Définition 1 : Probabilité de B sachant A

Soient A et B deux événements de l'univers Ω, A étant de probabilité non nulle $(P(A) \neq 0)$.

La **probabilité de B sachant** A (probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé) est le nombre $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

On note parfois $P_A(B) = P(B|A)$.

Remarque 1. De façon symétrique, on a $P_B(A) = \dfrac{P(\ldots\ldots\ldots)}{P(\ldots\ldots)} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(\ldots\ldots)}$.

Remarque 2. D'après la propriété 1, P_A est une nouvelle probabilité, dite **probabilité conditionnelle**, définie sur l'univers Ω.

Exemple 1. Un service après-vente a constaté que les retours d'un appareil sont dus dans 30% des cas à une panne *A*, dans 40% des cas à une panne *B* et dans 3% des cas à la simultanéité des deux pannes.

Un appareil choisi au hasard présente la panne *A*, la probabilité pour qu'il ait aussi la panne *B* est

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,03}{0,3} = 0,1$$

Remarque 3. Il faut bien distinguer $P_A(B)$ de $P(A \cap B)$.

- $P_A(B)$ désigne la probabilité pour l'appareil d'avoir la panne B sachant qu'il a déjà la panne A.
- $P(A \cap B)$ désigne la probabilité pour l'appareil d'avoir la panne A et la panne B.

Propriété 2 : Propriétés de P_A

Soit A un événement de probabilité non-nulle.

Puisque P_A est une probabilité, pour tout événement B de Ω, nous avons

$$0 \leq P_A(B) \leq 1 \qquad \text{et} \qquad P_A(B) + P_A\left(\overline{B}\right) = 1$$

Propriété 3 : Intersection

Si A et B sont des événements de probabilités non-impossibles de Ω, alors $P(A)$ et $P(B)$ sont non-nuls, et on a $\qquad P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) \qquad$ et $\qquad P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$

Démonstration Cela se déduit de la définition d'une probabilité conditionnelle.

$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \text{ donc } P(B \cap A) = P_A(B) \times P(B) \quad \text{et} \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ donc } P(A \cap B) = P_B(A) \times P(A)$$

Tableau à double entrée

Un tableau à double entrée permet de déterminer des probabilités conditionnelles.

	A	$\overline{A}$	Total
B	$P(A \cap B)$	$P\left(\overline{A} \cap B\right)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P\left(\overline{B} \cap A\right)$	$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$	$P\left(\overline{B}\right)$
Total	$P(A)$	$P\left(\overline{A}\right)$	1

Arbres pondérés

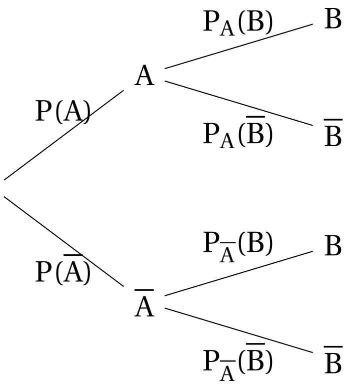
Propriété 4 : Règles des arbres probabilistes

On peut modéliser une situation mettant en jeu des probabilités conditionnelles grâce à un **arbre pondéré** (ou **arbre probabiliste**) en suivant les règles suivantes :

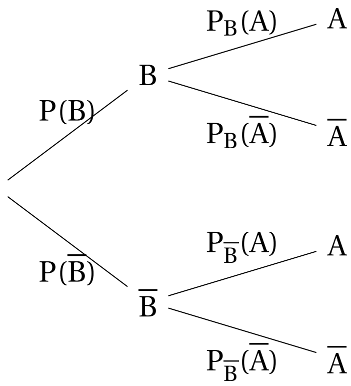
1. la somme des probabilités des événements (disjoints) correspondant aux branches partant d'un même nœud est 1
2. la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches qui composent ce chemin
3. la probabilité d'un événement est la somme des probabilités conduisant à ce chemin

Les probabilités sur les 2^{e}, 3^{e}, *etc.* branches d'un chemin sont des probabilités conditionnelles

Remarque 4. Dans le cas de deux évènements A et B de probabilités non nulles, on a :

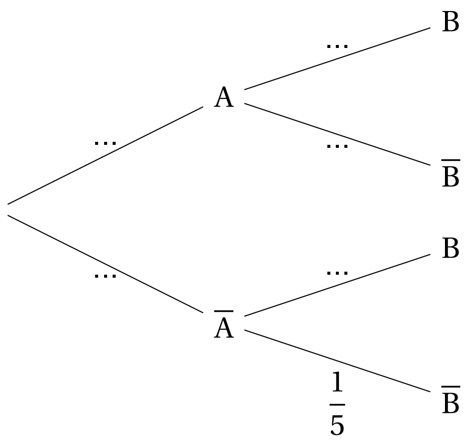


ou



C'est le contexte qui induira de représenter la situation par un arbre ou l'autre.

Exemple 2. Soient A et B deux événements non impossibles.
On donne $P(A) = \frac{1}{4}$ et $P_A(B) = \frac{2}{5}$. Une autre information est donnée par l'arbre de probabilités ci-dessous.



1. Compléter l'arbre de probabilités.
2. Déterminer $P\left(\overline{A} \cap B\right)$.
   $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$.

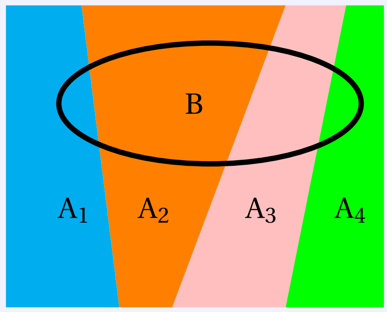
II Probabilités totales

Définition 2 : Partition de l'univers

On dit que des événements A_1, A_2, ..., A_n forment une **partition de l'univers** Ω si

- ces événements sont **deux à deux incompatibles**, c'est-à-dire pour tout i, j avec $1 \leq i, j \leq n$ et $i \neq j$, on a $A_i \cap A_j = \emptyset$
- ces événements **recouvrent** Ω, c'est-à-dire $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

Illustration pour $n = 4$ (le rectangle représente l'univers)



Si B est un événement, alors $A_1 \cap B$, $A_2 \cap B$, ..., $A_n \cap B$ forment une partition de B

Propriété 5 : Formule des probabilités totales

Soient A_1, A_2, ..., A_n des événements non-vides formant une partition de l'univers Ω.

Pour tout événement B, on a $P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)$.

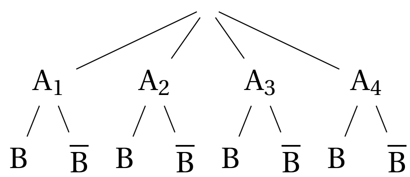
Ainsi $P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \ldots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$.

Remarque 5. Pour tout événement A non-vide (ou impossible $A \neq \emptyset$) et non certain $(\overline{A} \neq \emptyset)$, A et $\overline{A}$ forment toujours une partition de l'univers. On a donc pour tout événement B,
$P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B)$.

Remarque 6. Cette définition formalise la règle 3 sur les arbres pondérés.

Exemple 3.

Par exemple, pour $n = 4$, on a
$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + P(A_3) \times P_{A_3}(B) + P(A_4) \times P_{A_4}(B)$

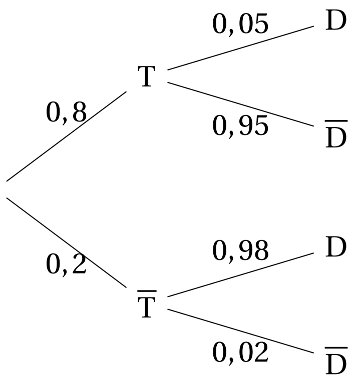


Exemple 4. Tous les élèves de Terminale ont passé un certificat de langues. 80% ont réussi le test, Parmi ceux qui ont réussi le test, 95% n'ont jamais redoublé.

Parmi ceux qui ont échoué, 2% n'ont jamais redoublé.

On note $\quad \mathrm{T}$: « L'élève a réussi le test » $\quad$ et $\quad \mathrm{D}$: « L'élève a redoublé »

1. La probabilité qu'un élève n'ait pas redoublé est



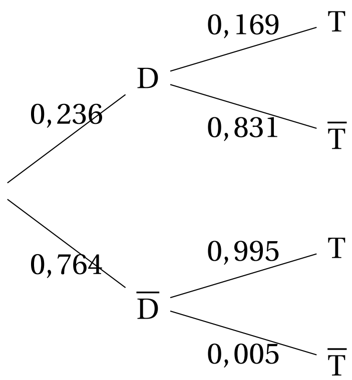
Comme A et $\overline{\mathrm{A}}$ forment toujours une partition de l'univers

D'après la formule des probabilités totales

$\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{D}}\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{T} \cap \overline{\mathrm{D}}\right) + \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{T}} \cap \overline{\mathrm{D}}\right)$

$\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{D}}\right) = 0,8 \times 0,95 + 0,2 \times 0,02 = 0,764$

2. La probabilité qu'un élève n'ait pas réussi le test sachant qu'il n'a pas redoublé est



$$\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{D}}}\left(\overline{\mathrm{T}}\right) = \frac{\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{T}} \cap \overline{\mathrm{D}}\right)}{\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{D}}\right)} = \frac{0,2 \times 0,02}{0,764} = 0,005$$

3. La probabilité qu'un élève ait réussi le test sachant qu'il a redoublé est

$$\mathrm{P}_{\mathrm{D}}(\mathrm{T}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{T} \cap \mathrm{D})}{\mathrm{P}(\mathrm{D})} = \frac{0,8 \times 0,05}{1 - 0,764} = 0,169$$

III Indépendance de deux événements

Définition 3 : Indépendance de deux événements

Considérons deux événements de probabilités A et B, de l'univers Ω.

Si $P_A(B) = P(B)$, c'est-à-dire si la réalisation ou non de l'événement A ne modifie pas la probabilité de B, on dit que B est **indépendant** de A.

Remarque 7. $P_A(B) = P(B) \Leftrightarrow \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Leftrightarrow \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$.
Ainsi $P_B(A) = P(A)$ donc l'événement A est indépendant de l'événement B.

On en déduit que B est indépendant de A si et seulement si A est indépendant de B.

Propriété 6 : caractérisation de l'indépendance

Deux événements A et B de probabilités non nulles sont indépendants si et seulement si

$$P_A(B) = P(B) \text{ ou } P_B(A) = P(A)$$

Deux événementsA et B de probabilités non nulles sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Remarque 8. Ne pas confondre événements incompatibles et événements indépendants.

Exemple 5. Montrer que A et B sont indépendants étant données les probabilités données ci-dessous.

	A	$\overline{A}$	Total
B	0,3	0,1	0,4
$\overline{B}$	0,45	0,15	0,6
Total	0,75	0,25	1

$P(A \cap B) = 0,3$

$P(A) \times P(B) = 0,75 \times 0,4 = 0,3$

Comme $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ alors les événements A et B sont indépendants.

Propriété 7 : Indépendance et événements contraires

Si deux événements A et B sont indépendants alors il en est de même pour les événements $\overline{A}$ et B, ainsi que pour $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Démonstration On démontre cette propriété pour $\overline{A}$ et B. La méthode est similaire pour les autres cas.

On sait que $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(B) \times P_B\left(\overline{A}\right)$.

Comme $P_B(A) + P_B\left(\overline{A}\right) = 1$, alors $P_B\left(\overline{A}\right) = 1 - P_B(A)$.

D'où $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(B) \times (1 - P_B(A))$.

Or, comme A et B sont indépendants, $P_B(A) = P(A)$,

donc on a $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(B) \times (1 - P(A))$.

On en déduit que $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(B) \times P\left(\overline{A}\right)$, ce qui prouve que $\overline{A}$ et B sont indépendants.