Succession d'épreuves indépendantes et loi binomiale

AP : Activité A1 page 366 : Observer des tirages indépendants ou non

Histoire des mathématiques

Depuis longtemps on a déterminé, dans les jeux les plus simples, les rapports des chances favorables ou contraires aux joueurs : les enjeux et les paris étaient réglés d'après ces rapports. remarquables qui ont illustré le XVIIe siècle.

Mais personne avant Pascal (en haut) et Fermat (en bas) n'avait donné des principes et des méthodes pour soumettre cet objet au calcul et n'avait résolu des questions de ce genre un peu compliquées. C'est donc à ces deux grands géomètres qu'il faut rapporter les premiers éléments de la science des probabilités, dont la découverte peut être mise au rang des choses.

I Succession d'épreuves indépendantes

Définition 1 : Epreuves independantes

Dans une succession d'épreuves, lorsque l'issue d'une épreuve ne dépend pas des épreuves précédentes, ou le résultat de l'une des épreuves n'influe pas sur le résultat de l'autre
on dit alors que ces épreuves sont **indépendantes**.

Propriété

On considère une succession de n épreuves indépendantes.
Pour toute liste $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ d'événements concernant les n épreuves successives alors le probabilité d'une issue est égale au produit des probabilités des issues de ses composantes
Autrement dit, $p(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = p(A_1) \times p(A_2) \times \dots \times p(A_n)$

Une telle succession peut se représenter par un **arbre de probabilité**.

Exemple 1. On jette un dé, puis on tire un jeton d'un sac contenant les jetons R, V , B et J, puis on jette une pièce.

Soit G : "le résultat du dé vaut au moins 5"

Soit R : "le jeton est R"

Soit F : "la pièce est tombée sur Face"

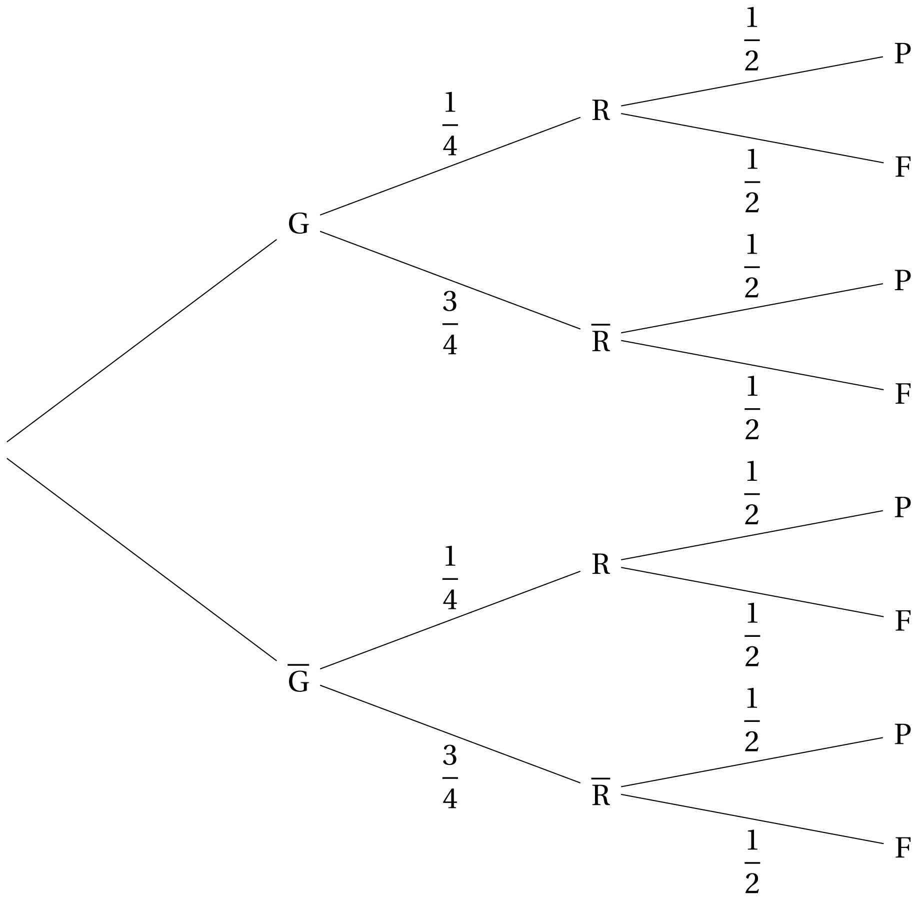
Soit P : "la pièce est tombée sur Pile"

Modéliser l'expérience puis déterminer $p(\mathrm{G}\cap\mathrm{R}\cap\mathrm{F})$.

Nous sommes en présence de 3 épreuves indépendantes. On a :

- $p(\mathrm{G}) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ car 5 et 6 sont les deux seules possibilités parmi les six
- $p(\mathrm{R}) = \dfrac{1}{4}$ car il y a qu'un seul jeton parmi les quatre jetons
- $p(\mathrm{F}) = \dfrac{1}{2}$ car il y a qu'une seule face F parmi les deux

Représentation par un arbre de probabilité.



On a alors, par exemple : $p(\mathrm{G}\cap\mathrm{R}\cap\mathrm{F}) = p(\mathrm{G}) \times p(\mathrm{R}) \times p(\mathrm{F}) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{24}$

<u>Conseil :</u> Il faut impérativement revoir le cours les **probabilités conditionnelles** de la classe de première !

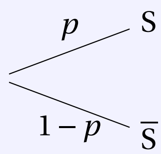
AP : Activité A2 page 366 : Reconnaitre un schema de Bernoulli

II Epreuve, loi et schéma de Bernoulli

Définition 2 : Epreuve de Bernoulli

On appelle épreuve de Bernoulli de paramètre p, toute expérience aléatoire admettant exactement deux issues :

- l'une appelée « succès » notée S, dont la probabilité est $p(\mathrm{S}) = p$
- l'autre appelée « échec » notée $\overline{\mathrm{S}}$, dont la probabilité est $p(\overline{\mathrm{S}}) = 1 - p$



Définition 3 : Loi de Bernoulli

Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 lorsque S est réalisé et 0 sinon.

La loi de probabilité de X est donnée sous la forme du tableau

On dit que la variable X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre p.

k	0	1
$p(\mathrm{X} = k)$	$1 - p$	p

Exemple 2. On lance d'un dé et on choisit que le succès est l'arrivée d'un 6. Déterminer la loi de la variable aléatoire X correspondant à cette situation.

> X est une variable aléatoire qui prend soit la valeur 1, soit la valeur 0.
> On associe à chaque valeur de X une probabilité : ici une chance sur six pour obtenir un 6, et cinq chances sur six pour obtenir un autre nombre.

k	0	1
$p(\mathrm{X} = k)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Propriété 1 : Espérance, variance et écart-type

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p alors

- l'espérance : $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = p$
- la variance : $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = p(1 - p)$
- l'écart-type : $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{p(1-p)}$

Démonstration :

- $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = (1 - p) \times 0 + p \times 1 = p$
- $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = (1 - p) \times (0 - \mathrm{E}(\mathrm{X}))^2 + p \times (1 - \mathrm{E}(\mathrm{X}))^2 = (1 - p)p^2 + p(1 - p)^2 = p(1 - p)(p + 1 - p) = p(1 - p)$
- $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{X})} = \sqrt{p(1-p)}$

Définition 4 : Schéma de Bernoulli

Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est l'expérience constituant à répéter n fois de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p.

Remarque 1. Un schéma de Bernoulli se représente à l'aide d'un arbre pondéré où les noeuds ont chacun 2 branches et où les mêmes probabilités p et $1-p$ sont répétées sur les couples de branches.

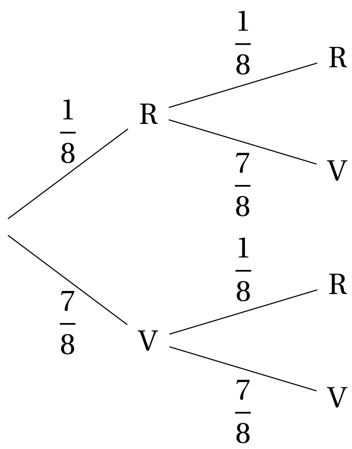
Exemple 3. On lance deux fois de suite un octaèdre régulier qui possède une face rouge et sept faces vertes.

1. Décrire l'univers des possibles Ω.
2. S'agit-il d'une épreuve de Bernoulli ? Si oui, la représenter.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois la face rouge (on notera X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de faces rouges obtenues) ?

1. L'univers des possibles Ω : $\Omega=$ (V,V) ; (V,R) ; (R,V) ; (R,R)
2. Il s'agit d'une expérience aléatoire qui a deux issues possibles (rouge ou vert) et qui est répétée à l'identique.

   De plus, les deux épreuves sont indépendantes : la première épreuve ne modifie en rien la seconde.

   Nous avons bien affaire à un schéma de Bernoulli.



3. $\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)=\left(\dfrac{1}{8}\right)^2=\dfrac{1}{64}$.

   Il y a une seule chance sur 64 d'obtenir deux fois la face rouge.

AP : Activité A3 page 367 : Découvrir la loi binomiale

AP : Activité A4 page 367 : Trouver une probabilité avec la loi binomiale

III Loi binomiale

Définition 5 : Loi binomiale

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre de succès au cours de ces n épreuves est appelée **loi binomiale de paramètres n et p** et on la note : $\mathrm{B}(n, p)$.

Exemple 4.

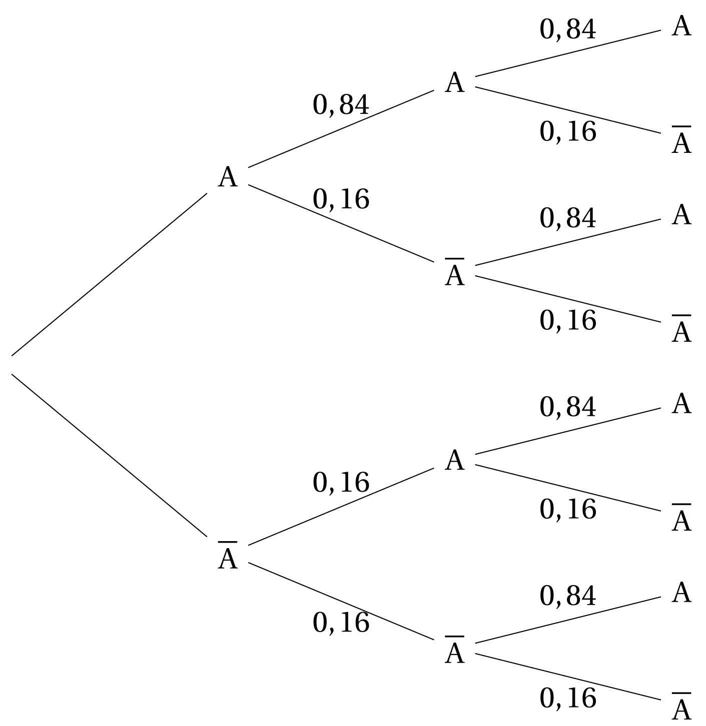
Une usine fabrique des composants électriques.

On prélève au hasard 3 composants dans la production de la journée.

On suppose que les prélèvements sont indépendants l'un de l'autre, et que la probabilité qu'un composant soit conforme au cahier des charges est égale à 0,84.

1. Représenter l'expérience par un arbre pondéré.
2. Enumérer tous les cas possibles dans un produit cartésien..
3. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de composants conformes parmi les 3. Que dire de X ?
4. Quelle est la probabilité que le premier composant soit conforme, mais pas les 2 suivants ?
5. Quelle est la probabilité que le second composant soit conforme, mais pas les 2 autres ?

1.



2. Les 8 issues possibles sont : $(\mathrm{A},\mathrm{A},\mathrm{A}),(\mathrm{A},\mathrm{A},\overline{\mathrm{A}}),(\mathrm{A},\overline{\mathrm{A}},\mathrm{A}),(\mathrm{A},\overline{\mathrm{A}},\overline{\mathrm{A}}),(\overline{\mathrm{A}},\mathrm{A},\mathrm{A}),(\overline{\mathrm{A}},\overline{\mathrm{A}},\mathrm{A}),(\overline{\mathrm{A}},\mathrm{A},\overline{\mathrm{A}}),(\overline{\mathrm{A}},\overline{\mathrm{A}},\overline{\mathrm{A}})$
3. Chacun des prélèvements constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=0,84$ et dont le succès est A.

   Les 3 prélèvements sont indépendants, et X compte le nombre de succès.

   Par conséquent X suit la binomiale de paramètres 3 et $0,84$ soit :$\mathrm{X}\sim\mathrm{B}(3;0,84)$
4. On cherche : $p((\mathrm{A},\overline{\mathrm{A}},\overline{\mathrm{A}}))=p(\mathrm{A})\times p(\overline{\mathrm{A}})\times p(\overline{\mathrm{A}})=0,84\times 0,16\times 0,16=0,021504$
5. On cherche : $p((\overline{\mathrm{A}},\mathrm{A},\overline{\mathrm{A}}))=p(\overline{\mathrm{A}})\times p(\mathrm{A})\times p(\overline{\mathrm{A}})=0,16\times 0,84\times 0,16=0,021504$

   On retrouve le résultat précédent.

Propriété 2 : Coefficient binomial

Soit $n\in\mathbb{N}*$ et $k\in\mathbb{N}$ avec $0\leq k\leq n$.

Le nombre de chemins réalisant k succès pour n répétitions sur l'arbre d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p est égal à $\binom{n}{k}$

C'est le nombre de combinaisons de k objets parmi n ; on l'appelle aussi coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

On rappelle que, par convention : $\binom{0}{0}=1$

Remarque 2. On obtient directement les coefficients binomiaux avec les calculatrices

Exemple 5. On reprend l'exemple précédent. Dénombrer le nombre d'événements donnant exactement 1 composant conforme. Citer les tous.

On cherche le nombre de chemins réalisant 1 succès pour 3 répétitions sur l'arbre précédent. Il est égal à $\binom{3}{1}=3$

Il s'agit de $(\mathrm{A},\overline{\mathrm{A}},\overline{\mathrm{A}})$, $(\overline{\mathrm{A}},\overline{\mathrm{A}},\mathrm{A})$ et ,$(\overline{\mathrm{A}},\mathrm{A},\overline{\mathrm{A}})$

Propriété 3 : Probabilité avec la loi binomiale

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p,

alors pour tout entier k dans $[0;n]$, on a $p(\mathrm{X}=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Remarque 3. En pratique, on obtient directement les valeurs de $p(\mathrm{X}=k)$ avec les calculatrices

Exemple 6. On reprend encore l'exemple précédent.

1. Donner la formule donnant la probabilité qu'exactement 2 composants soient acceptés, puis déterminer la valeur de cette probabilité (arrondie à 0,0001 près).
2. Déterminer la probabilité (arrondie à 0,0001 près) qu'au moins 1 composant soit accepté.

> 1. On cherche $p(\mathrm{X}=2)$
>   Alors $p(\mathrm{X}=2)=\binom{3}{2}0,84^2(1-0,84)^{3-2}=3\times 0,84^2\times 0,16\approx 0,3387$
>   A la calculatrice, on peut obtenir directement : $p(\mathrm{X}=2)\approx 0,3387$.
> 2. On cherche $p(\mathrm{X}\geq 1)$
>   - Permière méthode : $p(\mathrm{X}\geq 1)=p(\mathrm{X}=1)+p(\mathrm{X}=2)+p(\mathrm{X}=3)\approx 0,064512+0,338688+0,592704\approx 0,995904$
>   - Seconde méthode : $p(\mathrm{X}\geq 1)=1-p(\mathrm{X}<1)=1-p(\mathrm{X}=0)$
>   Et à la calculatrice, on obtient : $p(\mathrm{X}=0)\approx 0,0041$
>   Donc $p(\mathrm{X}\geq 1)\approx 0,9959$

Propriété 4 : Espérance, variance et écart-type avec la loi binomiale

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Binomiale de paramètre n et p alors

- l'espérance : $\mathrm{E}(\mathrm{X})=np$
- la variance : $\mathrm{V}(\mathrm{X})=np(1-p)$
- l'écart-type : $\sigma(\mathrm{X})=\sqrt{np(1-p)}$

Démonstration : exercice 138 page 397

Remarque 4. Il faut bien connaître l'utilisation de sa calculatrice afin de pouvoir résoudre les questions :

- Déterminer le plus petit entier k tel que $p(\mathrm{X}\leq k)\geq p$, voir méthode 8, page 378
- Déterminer le plus grand entier k tel que $p(\mathrm{X}\geq k)\geq p$, voir méthode 9, page 379

Exemple 7. La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n=45$ et $p=0,78$.

1. Déterminer le plus petit entier a vérifiant $\mathrm{P}(\mathrm{X}\leq a)\geq 0,01$. On trouve $a=28$
2. Déterminer le plus petit entier b vérifiant $\mathrm{P}(\mathrm{X}\geq b)\geq 0,9$. On trouve $b=31$

Exemple 8. (Baccalauréat Terminale ES/L Liban 29 mai 2018)
80 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité. On suppose que pour chaque personne la probabilité que le portique sonne est égale à $0{,}021\,92$.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique, parmi les 80 personnes de ce groupe.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.
3. Sans le justifier, donner la valeur arrondie à 10^{-3} de :
   - la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique ;
   - la probabilité qu'au maximum 5 personnes fassent sonner le portique.
4. Sans le justifier, donner la valeur du plus petit entier n tel que $P(X \leqslant n) \geqslant 0,9$.

1. On répète de manière identique et indépendante (situation assimilée à un tirage avec remise) 80 fois de suite cette épreuve. Il s'agit d'un schéma de Bernoulli donc la variable alÃľatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0{,}021\,92$.
2. L'espérance d'une loi binomiale est : $E(X) = n \times p = 80 \times 0{,}021\,92 = 1{,}753\,6$.

   Donc par groupe de 80 personnes le portail sonnera un peu moins de 2 fois.
3. On donne les valeurs arrondies à 10^{-3} de :
   - la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique :
     $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - (1 - 0{,}021\,92)^{80} \approx 0,830$.
   - la probabilité qu'au maximum 5 personnes fassent sonner le portique :
     $p(X \leqslant 5) \approx 0,992$ (à la calculatrice).
4. Avec la calculatrice : $p(X \leqslant 2) \approx 0,744$ et $p(X \leqslant 3) \approx 0,901$. Donc $n = 3$.