TD 18 Utilisation des formules binomFdp, binomFrép ou BinomialPD et BinomialCD

Les Ti et casio récentes intègrent 2 formules permettant de calculer toutes les probabilités liées à la loi binomiale avec un peu d'astuce :

Formule	Ti	Casio
P(X = k)	BinomFdp(n,p,k)	binomialPD(k,n,p)
P(X ≤ k)	BinomFrép(n,p,k)	binomialCD(k,n,p)
P(X ≥ k) = 1 - P(X≤ k-1)	1 – BinomFrép(n,p,k-1)	1 – binomialCD(k-1,n,p)
P(X < k) = P(X ≤ k-1)	BinomFrép(n,p,k-1)	binomialCD(k-1,n,p)
P(X > k) = 1 - P(X≤ k)	1 – BinomFrép(n,p,k)	1 – binomialCD(k,n,p)

Formule	Ti	Casio
P(a ≤ X ≤ b) = P(X ≤ b) – P(X < a)	BinomFrép(n,p,b) - BinomFrép(n,p,a-1)	binomialCD(b,n,p) - binomialCD(a-1,n,p)
P(a < X < b)	BinomFrép(n,p,b-1) - BinomFrép(n,p,a)	binomialCD(b-1,n,p) - binomialCD(a,n,p)

Si on vous demande de réaliser un tableau de valeurs pour k compris entre a et b pour $\mathcal{B}$(n,p):

- P(X=k)

Casio	Ti
Menu → table Y1 = binomialPD(X,n,p) F5 (Rang) Start:a - End : b - Pitch : 1 F6 (TABL)	*f(x)* Y1= binomFdp(n,p,X) *2nde* deftable DébTbl = a Pas = 1 *2nde* table

- P(X ≤ k)

Casio	Ti
Menu → table Y1 = binomialCD(X,n,p) F5 (Rang) Start:a - End : b - Pitch : 1 F6 (TABL)	*f(x)* Y1= binomFrép(n,p,X) *2nde* deftable DébTbl = a Pas = 1 *2nde* table

Exercice 1 : Calculer les probabilités suivantes à 0,001 près

X est une variable aléatoire suivant $\mathcal{B}$(40,0.6).

	P(X=24) =	P(X ≤ 12) =	P(X < 20) =	P(20 ≤ X ≤ 29) =	P(X > 30) =
Casio	BinomialPD(24,40,0.6)	BinomialPD(12,40,0.6)	BinomialPD(19,40,0.6)	BinomialCD(29,40,0.6) - binomialCD(19,40,0.6)	1 – binomialCD(30,40,0.6)
Ti	BinomFdp(40,0.6,24)	BinomFrép(40,0.6,12)	BinomFrép(40,0.6,19)	BinomFrép(40,0.6,29) - BinomFrép(40,0.6,19)	1 – BinomFrép(40,0.6,30)

X est une variable aléatoire suivant $\mathcal{B}$(30,0.8).

	P(X=24) =	P(X ≤ 12) =	P(X < 20) =	P(20 ≤ X ≤ 29) =	P(X > 30) =
Casio	BinomialPD(24,30,0.8)	BinomialPD(12,30,0.8)	BinomialPD(19,30,0.8)	BinomialCD(29,30,0.8) - binomialCD(19,30,0.8)	1 – binomialCD(30,30,0.8)
Ti	BinomFdp(30,0.8,24)	BinomFrép(30,0.8,12)	BinomFrép(30,0.8,19)	BinomFrép(30,0.8,29) - BinomFrép(30,0.8,19)	1 – BinomFrép(30,0.8,30)

Exercice 2 : Réaliser un tableau de valeurs à 0,001 près

X est une variable aléatoire suivant $\mathcal{B}$(80,0.3). Compléter le tableau suivant pour les valeur de k allant de 19 à 29.

k	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
P(X=k)	0.048	0.063	0.077	0.088	0.095	0.097	0.093	0.084	0.072	0.059	0.045
P(X≤k)	0.135	0.198	0.275	0.363	0.548	0.555	0.648	0.732	0.805	0.863	0.908

On va utiliser la table de valeurs

- P(X=k)

Casio	Ti
Menu → table Y1 = binomialPD(X,80,0.3) F5 (Rang) Start:19 - End : 29 - Pitch : 1 F6 (TABL)	*f(x)* Y1= binomFdp(80,0.3,X) *2nde* deftable DébTbl = 19 Pas = 1 *2nde* table

- P(X ≤ k)

Casio	Ti
Menu → table Y1 = binomialCD(X,80,0.3) F5 (Rang) Start:19 - End : 29 - Pitch : 1 F6 (TABL)	*f(x)* Y1= binomFrép(80,0.3,X) *2nde* deftable DébTbl = 19 Pas = 1 *2nde* table

Exercice 3 : Pile ou face
On lance une pièce équilibrée et on remporte le lancer si on tire « face ». On répète cette opération 20 fois d'affilée et X représente le nombre de « face » obtenues.
1- Justifier la loi suivie par X et indiquer ses paramètres
Les tirages sont indépendants et seules deux issues sont possibles, donc X suit une loi binomiale de paramètres n=20 et p = 0,5.
2- Quelle est l'espérance E(X) de ce jeu ? Pour une loi binomiale, E(X) = n x p = 20 x 0,5 = 10
3- Calculer P(X=10), P(X=8) et P(X=12)

	P(X=10) =	P(X=8) =	P(X=12) =
Casio	BinomialPD(10,20,0.5)	BinomialPD(8,20,0.5)	BinomialPD(12,20,0.5)
Ti	BinomFdp(20,0.5,10)	BinomFdp(20,0.5,8)	BinomFdp(20,0.5,12)

4- Calculer la probabilité d'obtenir un score compris entre 8 et 12. Comment l'écrit-on sous forme de probabilité ?

Exercice 4 : Le daltonisme
le daltonisme est une anomalie d'origine génétique affectant la vision. Une personne atteinte ne peut percevoir une des trois couleurs primaires. La plus courante (8 % des hommes, portée par le chromosome X), est la deutéranopie qui empêche la personne de voir le vert.
Soit une classe composée de 40 garçons et D la variable aléatoire correspondant au nombre de garçons deutéranopes.
1- Quelle est la probabilité qu'aucun des garçons ne soit daltonien ?
P(X=0) = BinomialPD(0,40,0.08) = BinomFdp(40,0.08,0)
2- En déduire la probabilité qu'au moins un en soit atteint.
P(X≥1) = 1- P(X=0) = 1 - BinomialPD(0,40,0.08) = 1 - BinomFdp(40,0.08,0)
3- Quelle est la probabilité qu'au maximum 3 garçons en soient atteints ?
P(X ≤ 3) = BinomialPD(3,40,0.08) = BinomFrép(40,0.08,3)
4- Quel devrait être l'effectif minimum de la classe en garçons pour être sûr à plus de 99 % qu'au moins un est deutéranope ?
Comme à la question 2, on va chercher à partir de combien d'élèves dans la classe la propabilité qu'aucun ne soit deutéranope soit en-dessous de 0.001.

Casio	Ti
Menu → table Y1 = binomialPD(0,X,0.08) F5 (Rang) Start:60 - End : 90 - Pitch : 1 F6 (TABL)	*f(x)* Y1= binomFdp(X,0.08,0) *2nde* deftable DébTbl = 60 Pas = 1 *2nde* table

Une fois la table affichée, on va la parcourir jusqu'à trouver la plus petite valeur de X pour laquelle Y1 est inférieure à 0.001 : on trouve qu'il faut au moins 83 garçons pour que la probabilité qu'aucun ne soit deutéranope soit inférieure à 0.001.

5- Une femme ne peut être deutéranope que si ses deux chromosomes X sont porteurs de l'anomalie. Sachant que dans la population 8 % des humains sont porteur de cette anomalie, en déduire la probabilité qu'une femme soit deutéranope.
Pour qu'une famme soit deutéranope, il faut que le chromosome X apporté par le père et celui apporté par la mère soient tous deux déficients. Si D est la variable aléatoire correspondant au nombre de chromosomes X déficients dans un tirage aléatoire de 2 chromosomes X que l'on suppose avec remise (la population est suffisamment grande pour le supposer), alors D suit une loi binomiale de paramètres n=2 et p=0.08.
Ainsi P(D=2) = BinomialPD(2,2,0.08) = BinomFdp(2,0.08,2) = 0.0064

Exercice 5 : Intervalle de fluctuation (17p179)
Dans une ville, 20 % des personnes utilisent les transports en commun chaque jour. On note X la variable aléatoire égale au nombre de de personnes utilisant les transports en commun chaque jour dans un échantillon de 200 personnes de cette ville.
1- Quelle loi suit X ? $\mathscr{B}$(200,0.2)
2- A l'aide du tableau ci-contre :
a. déterminer le plus petit entier a tel que P(X≤ a) > 0,025. a=29
b. déterminer le plus petit entier b tel que P(X≤ b) ≥ 0,975. b=51
3- En déduire un intervalle de fluctuation à 95 % de la proportion des personnes utilisant chaque jour les transports en commun dans un échantillon de cette ville de taille 200.
Un intervalle de fluctuation à 95 % de la proportion des personnes utilisant chaque jour les transports en commun est [a/n ; b/n] = [29/200 ; 51/200] = [0.145 ; 0.2505]

k	P(X ≤ k)
28	0,0179
29	0,0283
30	0,0430
...	
50	0,9655
51	0,9764

Exercice 6 : Prise de décision sur échantillon (19p179)
Victor, un producteur de fruits, a un terrain mal exposé : sur ce terrain, chacun de ses melons a la probabilité 0,6 d'avoir un taux de sucre insuffisant.
Dans la production très importante de Victor, on examine un échantillon tiré au hasard de taille 100. On appelle X la variable aléatoire associée au nombre de melons ayant un taux de sucre insuffisant dans cet échantillon.
1- Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? $\mathscr{B}$(200,0.2)

2- Un tableur a permis de déterminer les résultats suivants : le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0{,}025$ est 50 et le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0{,}975$ est 69. En déduire un intervalle de fluctuation à 95 % de la proportion de melons ayant un taux de sucre insuffisant dans les échantillons de taille 100.
Un intervalle de fluctuation à 95 % de la proportion des melons ayant un taux de sucre insuffisant est [a/n ; b/n] = [50/100 ; 69/100] = [0.50 ; 0.69]
3- L'hypothèse p=0,6 est acceptable au seuil de confiance de 95 % si p est compris dans l'intervalle de fluctuation de la proportion de melons ayant un taux de sucre insuffisant. Est-ce le cas ?
p est comprise dans l'intervalle [0.50 ; 0.69] l'hypothèse est donc acceptable.
4- Dans la coopérative voisine, un échantillon de 100 melons de provenance inconnue est passée au contrôle : 48 de ces melons ont un taux de sucre **suffisant**.
Au seuil de confiance de 95 %, peut-on accepter l'hypothèse que cette échantillon provient de la production de Victor ?
Attention au piège ! Si 48 des melons ont un taux de sucre suffisant, cela signifie que 52 n'ont pas un taux suffisant. 0.52 faisant également partie de l'intervalle [0.50 ; 0.69], l'hypothèse reste acceptable.

Exercice 7 : Définir des intervalles de fluctuation
Un exploitant agricole a réalisé un contrat avec une grande enseigne de distribution. L'enseigne lui prendra ses tomates si elles correspondent au calibre A , mais les rejettera sinon.
L'exploitant considère que chaque tomate a une probabilité de 0,8 de correspondre au calibre A et il aimerait s'en assurer. Pour cela, il va examiner un échantillon de 50 tomates prélevées au hasard et X sera le nombre de tomates répondant au calibre A.
1- Quelle est l'hypothèse que l'exploitant doit faire pour supposer que X suit une loi binomiale de paramètres n=50 et p=0,8 ? Deux possibilités : soit on effectue à un tirage avec remise, c'est à dire que les tomates contrôlées sont remises parmi les tomates non contrôlé (ce qui est peu probable), soit on considère que la production de tomates est suffisamment importante pour que le tirage sans remise soit assimilable à un tirage avec remise, ce qui est le cas, le nombre de tomates se comptant probablement en dizaines de milliers.
2- A l'aide de votre calculatrice, déterminer le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0{,}025$ et le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0{,}975$. En déduire un intervalle de fluctuation à 95 % de la proportion de tomates correspondant au calibre A dans les échantillons de taille 50.
La meilleure façon est de réaliser le tableau des valeurs de $P(X \leq k)$ à l'aide de la calculatrice (2ème partie de l'ex2), puis indiquer pour quelles valeurs de k $P(X \leq k)$ dépasse 0.025 puis 0.975. Il est aussi possible d'utiliser le programme « Fluctua » que je vous ai fourni... si le bug a été corrigé !
On trouve a = 34 et b = 45, donc l'intervalle est [34/50 ; 45/50] = [0.68;0.90]
3- Faire de même, mais pour un échantillon de taille 100
On trouve a = 72 et b = 88, donc l'intervalle est [72/100 ; 88/100] = [0.75 ; 0.88]
4- S'il en a la possibilité, quel est l'avantage à utiliser un échantillon de taille 100 d'après vos résultats ?
On remarque que l'intervalle de fluctuation est plus petit dans le cas d'un échantillon de taille 100 : le critère de sélection est plus précis.