Nom et prénom : ....

Exercice 1.

1. Déterminer la solution générale de l'équation $y' + 3y = 0$
2. Déterminer la solution unique vérifiant la condition initiale : $y(0) = 4$

Exercice 2.

1. Déterminer la solution générale de l'équation $y' + 4y = 5$
2. Déterminer la solution unique vérifiant la condition initiale : $y(0) = 1$

Exercice 3.

Un pépiniériste conditionne des bulbes de fleurs .On conviendra qu'un bulbe germe s'il donne naissance à une plante qui fleurit. On considère que le pépiniériste dispose d'un très grand nombre de bulbes et que la probabilité qu'un bulbe germe est de $0,83$.

Il prélève au hasard successivement quinze bulbes de ce stock. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de bulbes qui germent.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Quelle est la probabilité qu'exactement 5 bulbes choisis germent ? (mettre en évidence l'expression utilisée et donner le resultat à 10^{-5} près)
3. Quelle est la probabilité qu'au moins 9 bulbes germent ? (donner le resultat à 10^{-3} près)
4. En moyenne, sur un prélèvement de 15 bulbes, combien vont germer ?

Exercice 4. On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres 20 et $0,4$.

A l'aide de la caluclatrice, à 10^{-3} près,

1. calculer $p(X = 3)$ et $p(X = 10)$
2. calculer $p(X \leq 6)$ et $p(X \geq 12)$
3. determiner k telque $p(X \leq k) \geq 0,95$
4. determiner l'éspérance et l'ecart type de la variable aléatoire X

Correction

Exercice 1

1. $y' + 3y = 0 \Leftrightarrow y' = -3y$

   Donc la forme générale : $\boxed{y(x) = k\,e^{-3x}\,,\ k \in \mathbb{R}}$

2. La solution générale de l'équation est :$y = k\,e^{-3x}$

   Or $y(0) = 4 \Rightarrow ke^0 = 4 \Rightarrow k = 4$ donc $\boxed{y(x) = 4e^{-3x}}$

Exercice 2

1. $y' + 4y = 5 \Leftrightarrow y' = -4y + 5$

   Alors la fonction constante $x \mapsto \dfrac{5}{4}$ est une solution particulière de l'équation $y' + 4y = 5$

   Donc la forme générale : $\boxed{y(x) = k\,e^{-4x} + \dfrac{5}{4}\,,\ k \in \mathbb{R}}$

2. La solution générale de l'équation est : $y = k\,e^{-4x} + \dfrac{5}{4}$

   Or $y(0) = 1 \Rightarrow k\,e^0 + \dfrac{5}{4} = 1 \Rightarrow k = 1 - \dfrac{5}{4} = -\dfrac{1}{4}$ donc $\boxed{y = -\dfrac{1}{4}\,e^{-4x} + \dfrac{5}{4}}$

Exercice 3

1. Les 15 bulbes sont prélevées de manière indépendante car il y a un très grand nombre de bulbes et que pour chaque bulbe la probabilité de germer est de 0,83.

   De plus, il n'y a que deux issues possibles : germer ou non

   Donc $\boxed{\text{le nombre X de bulbes qui germent suit donc une loi binomiale de paramètres 15 et } 0,83}$

2. $p(\mathrm{X} = 5) = \dbinom{15}{5} \times 0,83^5 \times (1 - 0,83)^1 0 = 3003 \times 0,83^5 \times 0,17^1 0 \approx 0,00003$

   $\boxed{\text{Sur 15 bulbes, la probabilité qu'exactement 5 bulbes germent est d'environ } 0,00002}$

3. $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq 9) = 1 - p(\mathrm{X} < 9) = 1 - p(\mathrm{X} \leq 8) \approx 0,993$

   $\boxed{\text{Sur 15 bulbes, la probabilité qu'au moins 9 bulbes germent est d'environ } 0,993}$

4. $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 15 \times 0,83 = 12,45$ $\boxed{\text{En moyenne, il y a entre 12 et 13 bulbes qui germent sur les 15}}$

Exercice 4

1. $p(\mathrm{X} = 3) \approx 0,012$ et $p(\mathrm{X} = 10) \approx 0,117$

2. $p(\mathrm{X} \leq 6) \approx 0,250$ et $p(\mathrm{X} \geq 12) = 1 - p(\mathrm{X} \geq 11) \approx 0,057$

3. on cherche k telque $p(\mathrm{X} \leq k) \geq 0,95$ d'après la calculatrice $p(\mathrm{X} \leq 11) < 0,95$ et $p(\mathrm{X} \leq 12) \geq 0,95$

   donc $\boxed{\text{le plus petit entier est 12 telque } p(\mathrm{X} \leq k) \geq 0,95}$

4. $\mathrm{E}(x) = n \times p = 20 \times 0,4 = 8$ $\boxed{\text{l'espérance est de 8}}$

   $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = np(1 - p) = 20 \times 0,4 \times (1 - 0,4) = 4,8$ $\boxed{\text{la variance est de } 4,8}$

   $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{X})} = \sqrt{4,8} \approx 2,19$ $\boxed{\text{l'ecart type est } 2,19}$