CHAPITRE 7 Primitives et équations différentielles

Manuel p. 202-237

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

Dans ce chapitre est introduite la notion d'équation différentielle et les élèves y découvrent le concept d'équation où l'inconnue est une fonction.

L'équation $y' = f$ introduit la notion de primitive dont la pratique sera travaillée, à la fois sur les fonctions usuelles mais aussi sur les fonctions composées de la forme $(u' \circ v') \times v'$. Cette pratique doit permettre aux élèves d'installer des automatismes dans la recherche de primitives.

L'étude de l'équation $y' = ay + b$ est l'occasion de réinvestir les propriétés de la fonction exponentielle et les propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien utiles dans la résolution d'équations et d'inéquations.

Ce chapitre sollicite les connaissances sur la continuité, la dérivabilité, les limites de fonctions, la résolution d'équations et d'inéquations. L'étude des équations différentielles développe les compétences pour prendre des initiatives et occupe une place centrale comme outil de modélisation.

L'algorithmique y occupe une part non négligeable notamment pour proposer une résolution approchée d'une équation $y' = ay + b$ par la méthode d'Euler.

Objectifs

- → **Montrer qu'une fonction y est solution d'une équation différentielle.**
- → **Déterminer une primitive.**
- → **Résoudre l'équation $y' = ay$ ou $y' = ay + b$.**
- → **Étudier une fonction solution d'une équation $y' = ay + b$.**
- → **Modéliser des phénomènes.**
- → **Résoudre une équation $y' = ay + \varphi$ (a réel non nul, φ fonction).**

II. Corrigés

Pour prendre un bon départ p. 203

1. Calculer des dérivées de fonctions usuelles

a) $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

b) $[0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

c) $\mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin(x)$

d) $]0\,;+\infty[\cup]-\infty\,;0[$, $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$

e) $]0\,;+\infty[\cup]-\infty\,;0[$, $f'(x) = \dfrac{-2}{x^3}$

f) $\mathbb{R}$, $f'(x) = 4x^3$

2. Calculer des dérivées de fonctions de la forme $u \times v$, $\dfrac{u}{v}$ ou $\dfrac{1}{v}$

a) $]0\,;+\infty[\cup]-\infty\,;0[$, $f'(x) = \dfrac{(3x-1)e^{3x+1}}{x^2}$

b) $\mathbb{R}$, $f'(x) = (x+2)e^x$

c) $]-2\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x(x+4)}{(x+2)^2}$

d) $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \ln x + 1$

e) $]-\infty\,;-5[\cup]-5\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-2}{(x+5)^3}$

f) $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \sqrt{x} + \dfrac{x}{2\sqrt{x}}$

3. Calculer des dérivées de fonctions composées

a) $\mathbb{R}$, $f'(x) = -e^{-x+1}$ **b)** $\mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+3}$

c) $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3\cos(3x+1)$ **d)** $\mathbb{R}$, $f'(x) = 20(x+1)^4$

e) $\mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ **f)** $\mathbb{R}$, $f'(x) = 6xe^{3x^2-5}$

4. Identifier si deux fonctions ont la même dérivée

a) Les fonctions sont égales à la constante ln2 près sur I. Leur dérivée est $f'(x) = \dfrac{2x+6}{(x+1)(x+5)}$.

b) $f'(x) = -2\sin(2x) - 2\cos(2x)$et

$g'(x) = 2\cos(2x) - 2\sin(2x)$.

Elles ne sont pas égales sur I.

5. Résoudre des équations

a) $t = \dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)}{-3}$ **b)** Impossible.

c) $x = \ln\dfrac{100}{7}$ **d)** $t = -2\ln 5$

Activités p. 204-205

1 Découvrir la notion d'équation différentielle

- **Durée estimée :** 10 min
- **Objectif :** Introduire dans un contexte la notion d'équation différentielle et de fonction solution.

Les fonctions $f : t \mapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ sont deux fois dérivables et

$f'(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$

Et $f''(t) = -A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\sin(\omega t)$.

On vérifie que :

$mf''(t) + kf(t)$

$= m(-A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\sin(\omega t)) + k(A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t))$

$= m\left(-A\dfrac{k}{m}\cos(\omega t) - B\dfrac{k}{m}\sin(\omega t)\right) + kA\cos(\omega t)$

$+ kB\sin(\omega t) = 0$.

2 Découvrir la notion de primitive

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Déterminer une fonction primitive ou vérifier qu'une fonction est primitive d'une fonction donnée, en appliquant les règles de dérivation sur des exemples d'équations différentielles $y' = f$.

1. a) $y(x) = e^x + 3x$ convient.

b) $F(x) = 4\sqrt{x} - x$ convient.

2. a) Ici on ne reconnaît pas directement des fonctions usuelles ou des formules de dérivation obtenues par opération sur des fonctions usuelles.

b) $G(x) = (ax+b)e^x$ alors G est dérivable et

$G'(x) = (a + ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x$.

Par identification avec $g(x) = (x+2)e^x$, on arrive à $a = 1$ et $b = 1$.

Ainsi $G(x) = (x+1)e^x$.

3. $H(x) = x\ln x - x$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et

$H'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x$.

4. Si f et g ont la même dérivée sur I alors $f' - g' = 0$ sur I c'est-à-dire $(f-g)' = 0$, ainsi la fonction $f - g$ est constante sur I. Réciproquement s'il existe un réel k tel que $f - g = k$ alors $(f-g)' = 0$ soit $f' - g' = 0$ c'est-à-dire f *et* g ont la même dérivée sur I.

3 Introduire l'étude des équations $y' = ay$ et $y' = ay + b$

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** À partir d'une fonction solution, découvrir un ensemble de fonctions solutions.

A. L'équation $y' = y$

1. La fonction $x \mapsto e^x$.

2. Si on a $f' = f$ alors $(Kf)' = Kf' = Kf$ donc la fonction Kf est aussi solution de l'équation $y' = y$.

3. Les fonctions $x \mapsto Ke^x$, K réel.

B. L'équation $y' = ay$ et les fonctions de la forme $x \mapsto Ke^{ax}$ avec K et a réels

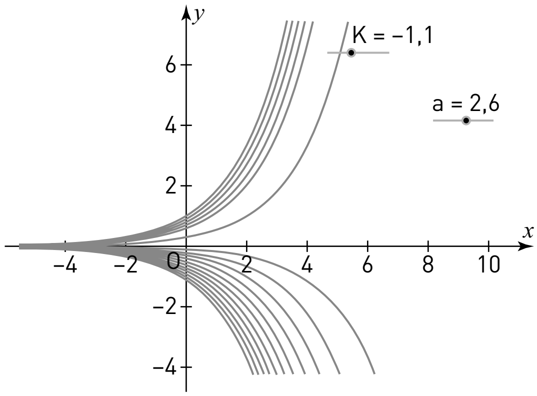
1. On dérive $f : x \mapsto e^{3x}$ et on obtient $f'(x) = 3e^{3x}$ donc $f' = 3f$.

2. Sur le modèle du **1. B** et en appliquant le bilan du **A** on fournit :

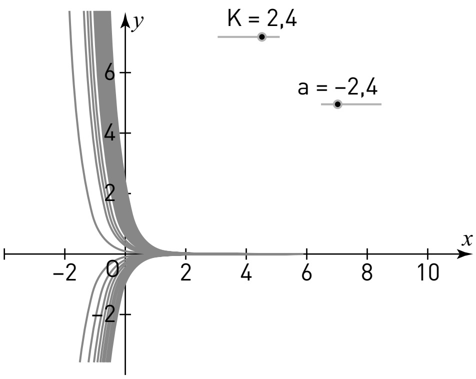
$x \mapsto Ke^{5x}$,K réel pour solutions de $y' = 5y$.

$x \mapsto Ke^{-x}$, K réel pour solutions de $y' = -y$.

3. *a* positif et *K* positif puis négatif :



a négatif et *K* positif puis négatif :



4. a) Courbe 1 **b)** Courbe 5

c) Courbe 4 **d)** Courbe 3

e) Courbe 2

C. L'équation $y' = ay + b$

1. En effet $y + \dfrac{5}{3}$ et y ont la même dérivée.

On a : f solution de (E) si et seulement si

$$F' = 3f + 5 \Leftrightarrow \left(f + \frac{5}{3}\right)' = 3\left(f + \frac{5}{3}\right)$$

$\Leftrightarrow f + \dfrac{5}{3}$ solution de $y' = 3y$.

D'après la partie **B**, les fonctions $x \mapsto Ke^{3x}$, K réel, sont des solutions de $y' = 3y$.

Donc les fonctions $x \mapsto -\dfrac{5}{3} + Ke^{3x}$, K réel, sont des solutions de (E).

2. f solution de $y' = ay + b$

$$\Leftrightarrow \left(f + \frac{b}{a}\right)' = a\left(f + \frac{b}{a}\right)$$

$\Leftrightarrow f + \dfrac{b}{a}$ solution de $y' = ay$.

D'après la partie **B**, les fonctions $x \mapsto Ke^{ax}$, K réel, sont des solutions de $y' = ay$.

Donc les fonctions $x \mapsto -\dfrac{b}{a} + Ke^{ax}$, K réel, sont des solutions de $y' = ay + b$.

Exercices à vous de jouer p. 207

1. a) $y'(x) = 5x^2 + 3x = f(x)$

b) $y'(x) = -\dfrac{3}{3x^4} = -\dfrac{1}{x^4} = f(x)$

2. a) $y(x) = e^{2x}$ donc $y'(x) = 2e^{2x}$ et on vérifie que $y' = 2y$.

b) $y(x) = \cos x \sin x$ donc :

$y'(x) = -\sin^2 x + \cos^2 x$ ainsi $y''(x)$

$= -2\cos x \sin x - 2\sin x \cos x$

$= -4\cos x \sin x$

donc $y'' = -4y$.

3.a) $y'(x) = \dfrac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2} = f(x)$.

b) $y'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} = f(x)$

c) $y'(x) = -\cos(x) = f(x)$

4.a) $F(x) = \dfrac{5}{12}x^4$

b) $F(x) = \dfrac{1}{4x^4}$

5.a) $F(x) = 2\sqrt{x}$ pour $I =]0 ; +\infty[$.

b) $F(x) = -\cos(x)$ pour $I = \mathbb{R}$.

6.1. $F'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x)$.

2. L'ensemble des primitives sont les fonctions $x \mapsto x\ln(x) - x + K$, avec K réel.

3. La primitive F qui s'annule en 1 est telle que $F(1) = 0$ soit $1 \times \ln(1) - 1 + K = 0 \Leftrightarrow K = 1$.
$F(x) = x\ln(x) - x + 1$

7. 1. $F'(x) = 2 \times \left(-\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)\right) = -2\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right) = f(x)$

2. $H(x) = 2\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right) + k$ et $H\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

$= 2(\cos\left(2 \times \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{2}\right) + k = 2$

$\Leftrightarrow 2\cos(0) + k = 2 \Leftrightarrow k = 0$

8. a) $F(x) = e^{-x}$ **b)** $F(x) = e^{x^2}$

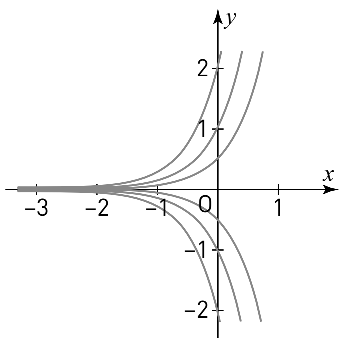
c) $F(x) = -\dfrac{\ln(x^3 + 5)}{3}$ **d)** $F(x) = \dfrac{(x^2 + x - 7)^6}{6}$

9. a) $F(x) = \dfrac{(x^4 + 3x)^3}{3}$ **b)** $F(x) = -\dfrac{1}{3x - 1}$

c) $F(x) = \sqrt{x^2 + x - 5}$ **d)** $F(x) = \dfrac{-\cos(2x)}{4}$

10. 1. L'ensemble des solutions sont les fonctions $y_K : x \mapsto Ke^{2x}$, où K est un réel.

2. Si K est positif, la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses, si K est négatif la courbe est en dessous de cet axe.



11. 1. a) $y' + \dfrac{1}{3}y = 0 \Leftrightarrow y' = -\dfrac{1}{3}y$

L'ensemble des solutions sont les fonctions

$y_K : x \mapsto Ke^{-\frac{1}{3}x}$, avec K réel.

b) $4y' + 5y = 0 \Leftrightarrow y' = -\dfrac{5}{4}y$

L'ensemble des solutions sont les fonctions

$y_K : x \mapsto Ke^{-\frac{5}{4}x}$, où K est un réel.

2. $Ke^{-\frac{5}{4}\times 1} = 2 \Leftrightarrow K = 2e^{\frac{5}{4}}$

Donc $y : x \mapsto 2e^{\frac{5}{4}}e^{-\frac{5}{4}x}$.

12. a) Une solution particulière est la fonction constante $-\dfrac{1}{2}$.

L'ensemble des solutions sont les fonctions

$y_K : x \mapsto -\dfrac{1}{2} + Ke^{2x}$, avec K réel.

b) Une solution particulière est la fonction constante $\dfrac{2}{5}$.

L'ensemble des solutions sont les fonctions

$y_K : x \mapsto \dfrac{2}{5} + Ke^{-5x}$, avec K réel.

c) $y' + y = 3 \Leftrightarrow y' = -y + 3$

Une solution particulière est la fonction constante 3.

L'ensemble des solutions sont les fonctions

$y_K : x \mapsto 3 + Ke^{-x}$, avec K réel.

d) $4y' + y - 5 = 0 \Leftrightarrow y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{5}{4}$

Une solution particulière est la fonction constante 5.

L'ensemble des solutions sont les fonctions

$y_K : x \mapsto 5 + Ke^{-\frac{1}{4}x}$, avec K réel.

13. Une solution particulière est la fonction constante −20.

L'ensemble des solutions sont les fonctions $y_K : x \mapsto -20 + Ke^{0,5x}$, avec K réel.

$y_K(4) = -30 \Leftrightarrow -20 + Ke^{0,5\times 4} = -30 \Leftrightarrow K = -10e^{-2}$

$y : x \mapsto -20 - 10e^{-2}e^{-5x}$

14. 1. Une primitive est $x \mapsto \dfrac{1}{2}\sin^2(x)$.

2. Une primitive est $x \mapsto e^{x^2+2x}$.

15. 1. $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+1} - \dfrac{(a+b+c)x^2 + (b-c)x - a}{x(x-1)(x+1)}$

Par identification, $a = -1$, $b = \dfrac{1}{2}$ et $c = \dfrac{1}{2}$.

2. Une primitive est

$G : x \mapsto -\ln(x) + \dfrac{1}{2}\ln(x-1) + \dfrac{1}{2}\ln(x+1)$.

16. $h(x) = e^x + xe^x$

Une primitive est $H : x \mapsto xe^x$.

17. $t(x) = \dfrac{1}{x}\ln(x)$

Une primitive est $T : x \mapsto \dfrac{(\ln(x))^2}{2}$.

18. 1. $3y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -\dfrac{2}{3}y$

Les solutions sont $y_k : x \mapsto Ke^{-\frac{2}{3}x}$, K réel.

2. $y_k(0) = e \Leftrightarrow Ke^{-\frac{2}{3}\times 0} = e \Leftrightarrow K = e$.

Donc $f : x \mapsto e \times e^{-\frac{2}{3}x} = e^{1-\frac{2}{3}x}$.

3. $f'(x) = -\dfrac{2}{3}e^{1-\frac{2}{3}x} < 0$ pour tout réel x.

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

5. $f(x) = 5 \Leftrightarrow e^{1-\frac{2}{3}x} = 5 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 = 3\ln(5)}{2}$

19. 1. $y' - 5y = 3 \qquad y' = 5y + 3$.

Une solution est la fonction constante $-\dfrac{3}{5}$.

Donc les solutions sont $y_k : x \mapsto -\dfrac{3}{5} + Ke^{5x}$, K réel.

2. $y_k(0) = -\dfrac{6}{5} \Leftrightarrow -\dfrac{3}{5} + Ke^{5\times 0} = -\dfrac{6}{5} \Leftrightarrow K = -\dfrac{3}{5}$

Donc $f : x \mapsto -\dfrac{3}{5} - \dfrac{3}{5}e^{5x}$.

3. $f'(x) = -3e^{5x} < 0$ pour tout réel x. Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\dfrac{3}{5}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

5. $f(x) = -10 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{5} - \dfrac{3}{5}e^{5x} = -10 \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln\left(\dfrac{47}{3}\right)}{5}$

6. $f(x) < -100 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{5} - \dfrac{3}{5}e^{5x} < -100 \Leftrightarrow x > \dfrac{\ln\left(\dfrac{497}{3}\right)}{5}$

7.

```
x ← 0
Tant que -3/5 (1 + e^(5x)) ≥ -10000
    x ← x + 1
Fin du tant que
```

20. 1. L'équation différentielle est $f' = \alpha f$, où α est une constante réelle. Les solutions sont de la forme $x \mapsto f(t) = Ke^{\alpha t}$, avec $f(0) = 25$ on obtient $f(t) = 25e^{\alpha t}$.

2. Avec la condition $f(10) = 15$, soit $25e^{\alpha\times 10} = 15$, on arrive à :

$f : x \mapsto 25e^{\frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{10}x}$.

3. $f(4) = 25e^{\frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{10}\times 4} = 25e^{\frac{2\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{5}} \approx 20{,}4$

Il reste environ 20,4 kg de sel.

4. $f(x) = 0{,}5 \Leftrightarrow 25e^{\frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{10}x} = 0{,}5 \Leftrightarrow x = \dfrac{-10\ln(50)}{\ln\left(\dfrac{3}{5}\right)} \approx 76{,}6$

Il ne reste plus que 0,5 kg de sel au bout d'environ 76,6 heures.

21. 1. Les solutions sont $y_K \mapsto Ke^{-0{,}035x}$, où K réel.

2. $y_K(0) = 7 \Leftrightarrow K = 7$ donc $g(x) = 7e^{-0{,}035x}$.

3. $g(100) = 7e^{-0{,}035\times 100} = 7e^{-3{,}5}$

$\approx 0{,}211$mW $> 0{,}08$ mW donc le son est détectable.

22. 1. $g'(x) - 3g(x) = \dfrac{1}{2}e^{1-x} - 3\left(-\dfrac{1}{2}e^{1-x}\right) = 2e^{1-x}$

Donc g est bien solution de (E).

2. $f'(x) - 3f(x) = 2e^{1-x} \Leftrightarrow f' - 3f = g' - 3g$

$\Leftrightarrow (f-g)' - 3(f-g) = 0$

3. $y' - 3y = 0 \Leftrightarrow y' = 3y$

Les solutions de (E′) sont de la forme Ke^{3x}, K réel.

Donc les solutions de (E) sont les fonctions

$f_K : x \mapsto -\dfrac{1}{2}e^{1-x} + Ke^{3x}$, K réel.

23. 1. $g'(x) + 2g(x) = 9e^{-3x} + 2(-3e^{-3x}) = 3e^{-3x}$

Donc g est bien solution de (E).

2. $f'(x) + 2f(x) = 3e^{-3x} \Leftrightarrow f' + 2f = g' + 2g$

3. $y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -2y$ $\Leftrightarrow (f-g)' + 2(f-g) = 0$ Les solutions de (E′) sont de la forme Ke^{-2x}, K réel.

Donc les solutions de (E) sont les fonctions

$f_K : x \mapsto -3e^{-3x} + Ke^{-2x}$, K réel.

24. 1. Soit $h : x \mapsto ax + b$ (a et b réels).

$h'(x) = h(x) + x \Leftrightarrow a = (a+1)x + b$

Par identification $a = -1$ et $b = -1$ donc $h : x \mapsto -x - 1$.

2. $f'(x) = f(x) + x \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = x$

$\Leftrightarrow f' - f = h' - h$

$\Leftrightarrow (f - h)' = f - h$

3. Les solutions de (E′) sont de la forme Ke^x, K réel.

Donc les solutions de (E) sont les fonctions

$f_K : x \mapsto -x - 1 + Ke^x$, K réel.

25. 1. $t'(x) = \dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{1}{2}\cos x$

$t(x) + \cos x = -\dfrac{1}{2}\cos x + \dfrac{1}{2}\sin x + \cos x$

$= \dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{1}{2}\cos x = t'(x)$

Donc t est bien solution de (E).

2. $f'(x) = f(x) + \cos x \Leftrightarrow f' - f = \cos x$

$\Leftrightarrow f' - f = t' - t$

$\Leftrightarrow (f - t)' = f - t$

3. Les solutions de (E′) sont de la forme Ke^x, K réel.

Donc les solutions de (E) sont les fonctions

$f_K : x \mapsto -\dfrac{1}{2}\cos x + \dfrac{1}{2}\sin x + Ke^x$, K réel.

26. 1. Solutions de (E_0) : $y(x) = Ke^x - 1$.

2. $f'(x) = g'(x)\sin x + g(x)\cos x$

f est solution de (E) si et seulement si

$g'(x)\sin x + g(x)\cos x - \left(1 + \dfrac{\cos x}{\sin x}\right) g(x)\sin x = \sin x$

$\Leftrightarrow (g'(x) - g(x)\sin x = \sin x$

$\Leftrightarrow (g'(x) - g(x)) = 1$ car $\sin x \neq 0$ c'est-à-dire $g' - g = 1$.

3. $f(x) = (Ke^x - 1)\sin x$

avec $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \left(Ke^{\frac{\pi}{4}} - 1\right) \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$

d'où $K = e^{\frac{-\pi}{4}}$.

27. 1. Si P est de degré n alors P' est de degré $n - 1$ donc $P' - P$ est de degré n ; ainsi pour P solution de $P'(x) = P(x) - x^2$, $P' - P$ est de degré 2 donc n est égal à 2.

2. On pose $P(x) = ax^2 + bx + c$ alors $P'(x) = 2ax + b$.

P solution si et seulement si pour tout

$x : ax^2 + bx + c - x^2 = 2ax + b$.

Par indentification des coefficients, on arrive à

$a = 1$, $b = c = 2$ donc $P(x) = x^2 + 2x + 2$.

3. f solution de $y' = y - x^2$ si et seulement si

$f' - f = P' - P$

si et seulement si $(f - P)' = f - P$

si et seulement si $f - P$ solution de $y' = y$

ainsi $f - P : x \mapsto Ke^x$.

Donc $f(x) = x^2 + 2x + 2 + Ke^x$.

Exercices apprendre à démontrer p. 216

Pour s'entraîner

Considérons une fonction $y(x) = Ke^{-ax}$.

Sa dérivée est $y'(x) = -Kae^{-ax}$, ainsi

$-ay(x) = -a(Ke^{-ax}) = -Kae^{-ax} = y'(x)$.

Réciproquement nous devons montrer que toute fonction solution est de la forme Ke^{-ax}.

Considérons g une solution de l'équation $y' = -ay$.

Alors, pour tout x de $\mathbb{R}$, $g'(x) = -ag(x)$.

Définissons une fonction t par :

$t(x) = g(x) \times e^{ax}$.

t est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$ on a :

$t'(x) = g'(x) \times e^{ax} + ag(x)e^{ax}$

$= e^{ax}(g'(x) + ag(x)) = 0$.

La fonction t est donc une fonction constante.

Il existe un réel K tel que $t(x) = K$ et ainsi $g(x) = Ke^{-ax}$.

Exercices calculs et automatismes p. 217

28. Existence de primitives

a) Vrai car continue sur I.

b) Vrai car continue sur I.

29. Primitives de x^n, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$

a) $\frac{x^2}{2}$ **b)** $\ln(x)$ **c)** $\frac{1}{8}x^8$

d) $-\frac{1}{x}$ **e)** $\frac{-1}{2x^2}$ **f)** $\frac{-1}{4x^4}$

30. Logique

a) Si F est une primitive d'une fonction f sur I, alors toute fonction de la forme F + k (k réel) est aussi primitive de f sur I.

b) Si deux fonctions f et g continues sur I sont égales, alors leurs primitives sont égales à une constante réelle près.

c) Considérant deux fonctions F et G dérivables sur I, on a : $(F - G)' = 0 \Leftrightarrow F = G + k$, k réel.

d) Pour$u$ et v fonctions dérivables, la fonction $u' \times (v' \circ u)$ admet une primitive de la forme $v \circ u$.

31. Primitives de fonctions usuelles

1. b) **2.** d) **3.** b) **4.** c)

32. Équations différentielles

a) Vrai **b) Faux** **c) Faux** **d) Vrai**

33. Primitives et opérations

Forme (u fonction dérivable)	$f(x)$	Primitive $F(x)$
$u' u^n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ et $n \neq -1$	$(2x+1)(x^2+x+5)$	$\frac{1}{3}((x^2+x+3)^3$
$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{2x+1}{(x^2+x+5)^2}$	$\frac{-1}{x^2+x+5}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+5}}$	$\sqrt{x^2+x+5}$
$\frac{u'}{u}$	$\frac{2x+1}{x^2+x+5}$	$\ln(x^2+x+5)$
$u'e^u$	$(2x+1)e^{x^2+x+5}$	e^{x^2+x+5}
$v' \times (u' \cdot v)$	$(2x+1)\cos(x^2+x+5)$	$\sin(x^2+x+5)$

34. Équations différentielles $y' = ay$

1. d) **2.** b)

35. Équations différentielles $y' = ay + b$

1. a) **2.** d) **3.** d)

36. Équations différentielles

C'est la courbe $\mathscr{C}_2$.

Exercices d'application p. 218-221

Montrer qu'une fonction est solution de $y' = f$

37. 1. a) $F'(x) = 3x + 1 = f(x)$

b) $F'(x) = -x^2 + e^x = f(x)$

c) $F'(x) = x^4 + x^3 + x = f(x)$

2. a) $F'(x) = -2x + 1 - \frac{8}{x-4} = f(x)$ sur I =]4 ; +∞[.

b) $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 = f(x)$ sur I =]0 ; +∞[.

38. 1. a) $F'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x = f(x)$

b) $F'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - 2xe^x}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{e^x(x^2 - 2x + 1)e^x}{(x^2+1)^2} = f(x)$

2. a) $F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^x + \sqrt{x}e^x$

$= \left(\frac{1+2x}{2\sqrt{x}}\right)e^x = f(x)$

b) $F'(x) = \ln(x) + \frac{x+1}{x}$

$= \ln(x) + 1 + \frac{1}{x} = f(x)$

39. a) $F'(x) = (x+1)^2 = f(x)$ sur I = $\mathbb{R}$.

b) $F'(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ sur I = $\mathbb{R}$.

c) $F'(x) = \dfrac{4(2x+3)(x^2+3x+1)}{(2(x^2+3x+1)^2)^2}$

$= \dfrac{2x+3}{(x^2+3x+1)^3} = f(x)$

sur $I = \left]\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} ; +\infty\right[$.

d) $F'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = f(x)$ sur $I = \mathbb{R}$.

40. a) $F'(x) = 2\cos(2x+3) = f(x)$ sur $I = \mathbb{R}$.

b) $F'(x) = \dfrac{\cos(x)\cos(x)+\sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)}$

$= \dfrac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$

$= 1 + \tan^2(x) = f(x)$

sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

41. 1. $F'(x) = \dfrac{1 \times \ln x - x \times \dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2} = f(x)$ sur $]1 ; +\infty[$.

2. $F'(x) = \dfrac{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)x - x - 2 + \ln x}{x^2} = f(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

3. $F'(x) = 2x\ln x + x^2 \times \dfrac{1}{x}$

$= 2x\ln x + x = f(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

4. $F'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x = f(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

Primitive d'une fonction usuelle

42. a) $F(x) = e^x$ **b)** $F(x) = 2\sqrt{x}$

c) $F(x) = \ln(x)$ **d)** $F(x) = \dfrac{1}{x}$

43. a) $F(x) = \dfrac{5}{12}x^4$ **b)** $F(x) = \dfrac{1}{2}x^3$

c) $F(x) = \dfrac{1}{3x^3}$ **d)** $F(x) = -\dfrac{1}{2x^2}$

Ensemble des primitives d'une fonction usuelle, primitive avec conditions initiales

44. a) Sur $I = \mathbb{R}$, $F(x) = e^x + k$, k réel.

b) Sur $I =]0 ; +\infty[$, $F(x) = 2\sqrt{x} + k$, k réel.

c) Sur $I =]0 ; +\infty[$, $F(x) = \ln(x) + k$, k réel.

d) Sur $I = \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{1}{8}x^8 + k$, k réel.

45. a) $F(x) = e^x - 1 - e$ **b)** $F(x) = 2\sqrt{x} - 4$

c) $F(x) = \ln(x) - 5$ **d)** $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{7}{3}$

46. a) $F(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - 4$ **b)** $F(x) = \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{2}{3}$

c) $F(x) = \dfrac{-1}{x} + 3$ **d)** $F(x) = -\dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{2}$

47. On cherche une fonction f telle que $f'(x) = \dfrac{2}{x^2}$ et $f(-1) = -2$.

L'équation de la courbe est donc $y = -\dfrac{2}{x} - 4$.

Déterminer une primitive

48. a) $F(x) = x^4 + x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + x$

b) $F(x) = \dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{1}{3}x^3 + 5x$

c) $F(x) = e^x + \dfrac{1}{4}x^4$

d) $F(x) = 2e^x + x^3 + 5x$

e) $F(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-2x} + \dfrac{1}{2}x^2 + 5x$

49. a) $F(x) = \ln(x) + \dfrac{1}{3}x^3 + k$, k réel.

b) $F(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + k$, k réel.

c) $F(x) = 3\ln(x) + \dfrac{5}{2}x^2 + k$, k réel.

d) $F(x) = -\dfrac{2}{3}\sqrt{x} + \ln(x) + x + k$, k réel.

50. a) $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$ **b)** $F(x) = e^{-x^2}$

c) $F(x) = e^{x^3+x} + 4x$ **d)** $F(x) = (x^3 + x + 1)^3$

51. a) $F(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ **b)** $F(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

c) $F(x) = -\frac{1}{x^2 + x + 1}$ **d)** $F(x) = -\frac{1}{4(x^2 + x + 1)^4}$

52. a) $F(x) = \ln(x^2 + 4x + 1)$ sur $I = \left]-2 + \sqrt{3}\,; +\infty\right[$.

b) $F(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 1}$ sur $I = \left]-2 + \sqrt{3}\,; +\infty\right[$.

c) $F(x) = -\frac{1}{x^2 + 4x + 1}$ sur $I = \left]-2 + \sqrt{3}\,; +\infty\right[$.

d) $F(x) = -\frac{1}{4(x^2 + 4x + 1)^4}$ sur $I = \mathbb{R}$.

53. a) $F(x) = \frac{1}{8}(x + 1)^8$ sur $I = \mathbb{R}$.

b) $F(x) = -\frac{1}{2(x + 4)^2}$ sur $I =]4\,; +\infty[$.

c) $F(x) = \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \ln(x - 2)$ sur $I =]2\,; +\infty[$.

d) $F(x) = -\frac{3}{x - 1}$ sur $I =]1\,; +\infty[$.

54. a) $F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x + 1)$ sur $I = \mathbb{R}$.

b) $F(x) = -\frac{1}{6}\cos^3(2x + 1)$ sur $I = \mathbb{R}$.

c) $F(x) = -\ln(\cos(x))$ sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}\,; \frac{\pi}{2}\right[$.

d) $F(x) = \frac{1}{\sin(x)}$ sur $I =]0\,; \pi[$.

Déterminer une primitive avec conditions initiales

55. a) $F(x) = \frac{1}{6}(x + 1)^6 - \frac{1}{6}$

b) $F(x) = -\frac{1}{7}e^{-7x} + \frac{1}{2}x^2$

c) $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2-2x+2} + 1 - \frac{1}{2}e^{4-2\sqrt{2}}$

d) $F(x) = \frac{1}{3}(x^2 + x - 1)^3 - \frac{2}{3}$

56. a) $F(x) = \ln(3x^2 + x + 1) + 2$

b) $F(x) = \sqrt{3x^2 + 4x + 1} + 1$

c) $F(x) = \frac{1}{7}\sin(7x) + 2$

d) $F(x) = -\frac{2}{x + 4} + 3$

57. 1. $x \mapsto e^x \ln(x) + \frac{e^x}{x}$ est dérivable, donc continue, sur $]0\,; +\infty[$. Elle admet donc des primitives sur $]0\,; +\infty[$.

2. La primitive est $F : x \mapsto e^x \ln(x)$.

Équation différentielle $y' = ay$

58. 1. b) **2.** d) **3.** a)

59. a) Les solutions sont $y_k : x \mapsto Ke^{4x}$, K réel.

b) Les solutions sont $y_k : x \mapsto Ke^{\frac{3}{2}x}$, K réel.

c) $y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -2y$

Les solutions sont $y_k : x \mapsto Ke^{-2x}$, K réel.

d) $3y' - y = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{3}y$

Les solutions sont $y_k : x \mapsto Ke^{\frac{1}{3}x}$, K réel.

60. 1. $y' - 10y = 0 \Leftrightarrow y' = 10y$

Les solutions sont $y_k : x \mapsto Ke^{10x}$, K réel.

1. $y_k\left(\frac{2}{e}\right) = -0{,}1 \Leftrightarrow Ke^{10\times\frac{2}{e}} = -0{,}1$

$\Leftrightarrow K = -0{,}1e^{-\frac{20}{e}}$

Donc la solution est $y : x \mapsto -0{,}1e^{-\frac{20}{e}+10x}$.

61. 1. a) $2y' + 5y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{5}{2}y$

Les solutions sont $y_k : x \mapsto Ke^{-\frac{5}{2}x}$, K réel.

b) $y_k(2) = 1 \Leftrightarrow Ke^{-\frac{5}{2}\times 2} = 1 \Leftrightarrow K = 2e^5$.

Donc la solution est $y : x \mapsto 2e^{5-\frac{5}{2}x}$.

2. a) Les fonctions ont la même expression algébrique, ce sont donc les mêmes.

b) $f'(x) = -\frac{5}{2}e^{-\frac{5}{2}x+5} < 0$ pour tout réel x.

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

62. 1. Proposition 1 : **Faux.**

2.Proposition 2 : **Faux.**

3. Proposition 3 : **Vrai.**

Proposition 4 : **Faux.**

63. 1. P est de la forme $Ke^{0,21t}$, K réel.

2. $P(0) = 0,07 \Leftrightarrow Ke^{0,21\times 0} = 0,07 \Leftrightarrow K = 0,07$

Donc $P(x) = 0,07e^{0,21x}$.

$P(30) = 0,07e^{0,21\times 30} = 0,07e^{6,3} \approx 38,1$

La plante pèse environ 38,1 g au bout d'un mois.

64. 1. Les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ke^{\frac{x}{2}}$, seule la fonction avec $K = y_0 \times e^{\frac{-x_0}{2}}$ passe par M_0.

2. Le point d'ordonnée 2 de ces courbes est aussi associé au nombre dérivé $y' = \frac{1}{2} \times 2 = 1$.

Donc parallèle à la droite $y = x$.

65. 1. $a = 0,8$ et $b = \frac{\ln(2,7125)}{10} \approx 0,100$

2. $y' = by$

3. $f(23) \approx 0,8e^{0,100\times 23} \approx 7,98$

En 2023, le montant des ventes sera d'environ 7,98 milliers d'euros.

Équation différentielle $y' = ay + b$

66. a) Les solutions sont $y_k : x \mapsto \frac{1}{2} + Ke^{2x}$, K réel.

b) Les solutions sont $y_k : x \mapsto 4 + Ke^{-\frac{1}{4}x}$, K réel.

c) Les solutions sont $y_k : x \mapsto \frac{3}{2} + Ke^{-2x}$, K réel.

d) Les solutions sont $y_k : x \mapsto -\frac{1}{5} + Ke^{\frac{5}{2}x}$, K réel.

67. 1. a) **2.** a)

68. 1. Les solutions sont $y_k : x \mapsto -\frac{5}{2} + Ke^{2x}$, K réel.

2. $y_k(0) = 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} + Ke^{2\times 0} = 0 \Leftrightarrow K = \frac{5}{2}$.

Donc la solution est $y : x \mapsto -\frac{5}{2} + \frac{5}{2}e^{2x}$.

69. La fonction solution est $y : x \mapsto 3 - 2e^{-2x}$.

C'est la courbe $\mathscr{C}_4$.

70. 1. a) Les solutions sont $y_k : x \mapsto -4 + Ke^{\frac{1}{5}x}$, K réel.

b) $y_k(5) = -5 \Leftrightarrow -4 + Ke^{\frac{1}{5}\times 5} = -5 \Leftrightarrow K = -\frac{1}{e}$

Donc la solution est $y : x \mapsto -4 - \frac{1}{e}e^{\frac{1}{5}x} = -4 - e^{\frac{1}{5}x-1}$.

2. a) Les fonctions ont la même expression algébrique, ce sont donc les mêmes.

b) $f'(x) = -\frac{1}{5}e^{\frac{1}{5}x-1} < 0$ pour tout réel x.

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -4$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

71. 1. a) $f(x) = Ce^{-0,12x}$ où C est un réel quelconque.

b) $f(x) = 1013,25\ e^{-0,12x}$

2. a) Une altitude de 150 mètres correspond à 0,15 kilomètre donc la pression atmosphérique à 150 mètres d'altitude est $f(0,15) \approx 995,17$ hPa.

b) L'altitude correspondant à une pression atmosphérique de 900 hPa est la solution (en kilomètre) de l'équation

$f(x) = 900 \Leftrightarrow 1\,013,25e^{-0,12x}$

$$\Leftrightarrow -0,12x = \ln\frac{900}{1013,25} \Leftrightarrow x = \frac{\ln\frac{900}{1013,25}}{-0,12}$$

$\Leftrightarrow x \approx 0,988$. L'altitude correspondant à une pression atmosphérique de 900 hPa est 988 mètres.

72. 1. Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $\frac{0,1}{k} + Ce^{-kt}$, C réel.

$\frac{0,1}{k} + Ce^{-k\times 0} = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{0,1}{k}$

Donc $Q(t) = \frac{0,1}{k} - \frac{0,1}{k}e^{-kt}$.

2. $k > 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} Q(t) = \frac{0,1}{k}$, cette limite dépend donc de k.

Donc, après un certain temps, la quantité de pénicilline dans le sang sera proche de $\frac{0,1}{k}$ mg.

3. $Q(180) = \frac{0,1}{2k} \Leftrightarrow \frac{0,1}{k} - \frac{0,1}{k}e^{-180k} = \frac{0,1}{2k} \Leftrightarrow k = \frac{\ln(2)}{180}$

73. 1. $u(t) = k\cdot e^{-t/RC}$

à $t = 0$: $u = 20$, donc $k = 20$ et donc $u(t) = 20\ e^{-t/RC}$.

2. $RC = 0,1$ donc $u(t) = 20e^{-10t}$.

$u(t) > 5 \Leftrightarrow 20e^{-10t} > 5$

$\Leftrightarrow -10t > \ln(0,25) \Leftrightarrow t < \frac{\ln(0,25)}{-10}$

$\Leftrightarrow t < 0,14$

74. 1. Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $Ke^{(\beta-\delta)t}$, K réel.

$Ke^{(\beta-\delta)\times 0} = N_0 \Leftrightarrow K = N_0$

Donc $N(t) = N_0e^{(\beta-\delta)t}$.

2. Si $\beta > \delta$, N est alors une fonction exponentielle avec un coefficient strictement positif en exposant, elle a donc le même comportement que la fonction exponentielle.

3. Si $\beta < \delta$, N est alors une fonction exponentielle avec un coefficient strictement négatif en exposant, il s'agit donc d'une décroissance exponentielle.

75. 1. a) $f(t) = 0,025 + Ke^{-0,12t}$, $K \in \mathbb{R}$.

b) $f(0) = 0,5$

c) On a donc pour $t > 0$,

$f(t) = 0,025 + 0,475e^{-0,12t}$.

2. a) $f'(t) = -0,057e^{-0,12t} < 0$ donc $f'(t) < 0$ sur $[0\ ;+\infty[$, donc f est décroissante sur cet intervalle.

c) Le résultat précédent montre que la concentration va baisser à partir de 0,5.

3. $f(t) = 0,25$

$\Leftrightarrow 0,025 + 0,475e^{-0,12t} = 0,25$

$\Leftrightarrow 0,475e^{-0,12t} = 0,225$

$\Leftrightarrow e^{-0,12t} = \ln\left(\frac{9}{19}\right)$

$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{9}{19}\right)}{-0,12} \approx 6,227$

Il faut donc un peu plus de 6 minutes pour avoir une concentration de 0,25 mole par litre.

4. a) $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,12t} = 0$ alors $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0,025$.

Au bout d'un certain temps la concentration en octane va se rapprocher de 0,025 mole par litre.

b) Au bout d'une heure (60 min), la concentration en octane est égale à :

$f(60) = 0,475e^{-0,12\times 60} + 0,025 \approx 0,025355$, donc très proche de la valeur 0,025. Il est donc inutile de continuer le processus après une heure.

Exercices d' entraînement p. 222-224

Transformer l'écriture d'une fonction pour trouver ses primitives

76. 1. $\sin x - \sin x \times \cos^2(x) = \sin x - \sin x(1 - \sin^2 x)$
$= \sin x - \sin x + \sin^3 x$
$= \sin^3 x$

2. $F : x \mapsto -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x$

3. $F_k : x \mapsto -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + k$, k réel.

$-\cos(\pi) + \frac{1}{3}\cos^3(\pi) + k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{2}{3}$.

$F : x \mapsto -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x - \frac{2}{3}$

77. 1. $h(x) = 1 \times e^{2x} + x \times 2e^{2x} = u'v + v'u$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^{2x}$.

Une primitive sera : $x \mapsto H(x) = xe^{2x}$.

2. $g(x) = -\sin(x)e^x + \cos(x)e^x = u'v + v'u$ avec $u(x) = cos(x)$ et $v(x) = e^x$.

Une primitive $G : x \mapsto \cos(x)e^x$.

78. Les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ sont de la forme $\ln(\ln(x)) + k$, k réel.

$\ln(\ln(\mathrm{e})) + k = 1 \Leftrightarrow k = 1$

$F : x \mapsto \ln(\ln(x)) + 1$

79. Les primitives de $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ sont de la forme $\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right) + k$, k réel.

$\ln\left(\sqrt{1^2+1}\right) + k = 0 \Leftrightarrow k = -\dfrac{1}{2}\ln(2)$

$F : x \mapsto \ln\left(\sqrt{x^2+1}\right) - \dfrac{1}{2}\ln(2)$

80. 1. $F'(x) = a\mathrm{e}^{1-x} - ax\mathrm{e}^{1-x} = (a - ax)\mathrm{e}^{1-x}$.

Par identification avec $f(x)$, $a = 2$.

2. L'ensemble des primitives de f est $\left\{x \mapsto 2x\mathrm{e}^{1-x} + k,\ k \text{ réel}\right\}$.

$2 \times 2{,}75\mathrm{e}^{1-2{,}75} + k = 0 \Leftrightarrow k = -5{,}5\mathrm{e}^{-1{,}75}$

$x \mapsto 2x\mathrm{e}^{1-x} - 5{,}5\mathrm{e}^{-1{,}75}$

Étude complète d'une fonction primitive

81. 1. $f'(t) = \mathrm{e}^{t-1} + t\mathrm{e}^{t-1} = (t+1)\mathrm{e}^{t-1}$.

2. $f'(t) = (t+1)\mathrm{e}^{t-1}$ et $\mathrm{e}^{t-1} > 0$ pour tout réel t, le signe de $f'(t)$ dépend donc du signe de $(t + 1)$.

t	$-\infty$		-1		$+\infty$
$t+1$		$-$	0	$+$	
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	↘	$1-\mathrm{e}^{-2}$	↗	$+\infty$

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(t) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(t) = +\infty$

82. 1. $F'(x) = \ln(x+1) + \dfrac{x+1}{x+1} - 3$

$= \ln(x+1) - 2 = f(x)$

2. $F'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \mathrm{e}^2 - 1$

x	$-\infty$		e^2-1		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$	$+\infty$	↘	$1-\mathrm{e}^{-2}$	↗	$+\infty$

3. $f(0) = \ln(0+1) - 2 = -2$

Le coefficient directeur est donc -2.

83. 1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. $f'(x) = 1 - \dfrac{2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}+1}{(\mathrm{e}^x+1)^2} > 0$ pour tout réel x.

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$F(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

3. a) $x + 2 + \ln(4) - \dfrac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} = x + \ln(4) + \dfrac{2(\mathrm{e}^x+1) - 2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$

$= x + \ln(4) + \dfrac{2}{\mathrm{e}^x+1} = f(x)$

b) L'ensemble de primitives de f est $\left\{\dfrac{1}{2}x^2 + 2x + \ln(4)x - 2\ln(\mathrm{e}^x+1) + k,\ k \text{ réel}\right\}$.

84. 1. $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x-1} = \dfrac{(a+b+c)x^2 + (b-c)x - a}{x(x^2-1)}$

Par identification avec $g(x)$, $a = -1$, $b = \dfrac{1}{2}$ et $c = \dfrac{1}{2}$.

2. L'ensemble des primitives de g est $\left\{-\ln(x) + \dfrac{1}{2}\ln(x+1) + \dfrac{1}{2}\ln(x-1) + k,\ k \text{ réel}\right\}$

3. $G(x) = -\ln(x) + \dfrac{1}{2}\ln(x+1) + \dfrac{1}{2}\ln(x-1) + k$

$= \ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right) + k$

$\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = k$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} G(x) = -\infty$.

85. 1. Proposition 1 : **Faux.**

Proposition 2 : **Faux.**

2. Proposition 3 : **Faux**.

Proposition 4 : **Vrai.**

86. 1. $y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y$

Les solutions sont de la forme $K\mathrm{e}^{-x}$, K réel.

$K\mathrm{e}^{-0} = \mathrm{e} \Leftrightarrow K = \mathrm{e}$

Donc $f(x) = \mathrm{e}^{1-x}$.

2. $e^{1-x} = c \Leftrightarrow 1 - x = \ln(c) \Leftrightarrow x = 1 - \ln(c)$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x} = 0$

4. Cet algorithme détermine, pour un entier p donné, à partir de quelle valeur entière x on a $e^{1-x} < 10^{-p}$.

Étant donné que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x} = 0$ et que $10^{-p} > 0$ pour tout entier p, cet algorithme va forcément s'arrêter par définition de la limite.

Modéliser avec des équations différentielles

87. 1. L'équation différentielle est $T' = cT$, où c est une constante réelle.

La fonction solution est $T : x \mapsto 100e^{\frac{\ln\left(\frac{9}{20}\right)}{10}x}$

2. $T(x) = 25 \Leftrightarrow 100e^{\frac{\ln\left(\frac{9}{20}\right)}{10}x} = 25$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-10\ln(4)}{\ln\left(\frac{9}{20}\right)} \approx 17$$

La température atteindra 25° au bout de environ 17 min.

88. 1. a) $B' = kB$, k réel, avec les conditions $B(0) = 600$ et $B(2) = 1800$.

b) Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme Ce^{kt}, C réel.

$B(0) = 600 \Leftrightarrow Ce^{k\times 0} = 600 \Leftrightarrow C = 600$

$B(2) = 1800 \Leftrightarrow 600e^{2k} = 1800 \Leftrightarrow k = \dfrac{\ln(3)}{2}$

Donc $B(t) = 600e^{\frac{\ln(3)}{2}t}$.

c) $B(4) = 600e^{\frac{\ln(3)}{2}\times 4} = 5\,400$.

Il y a 5 400 bactéries après 4 heures.

d) $B(t) > 12000 \Leftrightarrow 600e^{\frac{\ln(3)}{2}t} > 12000$

$$\Leftrightarrow t > \frac{2\ln(20)}{\ln(3)} \approx 5{,}45$$

Le nombre de bactérie dépassera 12 000 au bout d'environ 5,45 heures.

2.

```
t ← 0
Tant que 600e^(ln(3)/2 t) < 12000 :
    t ← t + 1
Fin tant que
```

89. 1. a) $f(t) = C\,e^{-0{,}065t} + 30$

b) $f(0) = 1400$ donc $C = 1\,370$ et $f(t) = 1370e^{-0{,}065t} + 30$.

2. a) Sur $[0\,;+\infty[$,

$f'(t) = -0{,}065 \times 1370e^{-0{,}065t} < 0$.

Donc la fonction f est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

b) La fonction f représente la température de la pièce après sa sortie du four ; la pièce refroidit en sortant du four donc la température diminue et donc la fonction f est décroissante.

90. 1. $Y' = 0{,}25(360 + 0{,}8Y + 120 - Y)$

$\Leftrightarrow Y' = -0{,}05Y + 120.$

2. $Y(t) = Ce^{-0{,}05t} + 2400$ et $Y(0) = 2\,000$ donc $C = -400$ et $Y(t) = -400e^{(-0{,}05t)} + 2\,400$.

3. $\lim\limits_{t\to+\infty} Y(t) = 2\,400$.

Le revenu se stabilise à 2 400.

91. 1. Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $Ke^{-0{,}7x}$, K réel.

$f(0) = e^{2{,}1} \Leftrightarrow Ke^{-0{,}7\times 0} = e^{2{,}1} \Leftrightarrow K = e^{2{,}1}$.

Donc $f(x) = e^{2{,}1}e^{-0{,}7x} = e^{2{,}1-0{,}7x}$.

2. a) $h'(x) = f'(x) - g'(x) = -0{,}7e^{2{,}1-0{,}7x} - 0{,}5$

b) $e^{2{,}1-0{,}7x} > 0$ pour tout réel x donc

$h'(x) = -0{,}7e^{2{,}1-0{,}7x} - 0{,}5 < 0$ pour tout réel x.

Donc h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

c) Sur $[0\,;\,5]$, h est continue (car dérivable) et strictement décroissante, de plus

$h(0) = e^{2{,}1-0{,}7\times 0} - (0{,}5 \times 0 + 0{,}7) = e^{2{,}1} - 0{,}7 > 0$

et $h(5) = e^{2{,}1-0{,}7\times 5} - (0{,}5 \times 5 + 0{,}7) = e^{-1{,}4} - 3{,}2 < 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0\,;\,5]$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 2{,}172$.

3. $f(q_0) = g(q_0) \Leftrightarrow f(q_0) - g(q_0) = 0$

$\Leftrightarrow h(q_0) = 0 \Leftrightarrow q_0 = \alpha$

Donc $q_0 = \alpha \approx 2{,}172$ et $p_0 = g(q_0) = 0{,}5\alpha + 0{,}7 \approx 1{,}786$

92. 1. Le volume de CO_2 présent dans cette pièce à 20 h est de $900\,000 \times \dfrac{0{,}6}{100} = 9\,000 \times 0{,}6 = 5400$ dm^3.

2. a) $V(t) = Ae^{-0{,}01t} + 450$ avec $A \in \mathbb{R}$.

b) $V(0) = A + 450 = 5\,400$, d'où $A = 5\,400 - 450 = 4\,950$ ainsi

$V(t) = 4\,950\mathrm{e}^{-0,01t} + 450$

3. 21 h correspond à $t = 60$, donc

$V(60) = 4\,950\mathrm{e}^{-0,01\times 60} + 450 \approx 3\,166,62$, soit 3 167 dm^3 à 1 dm^3 près.

93. 1. $g : t \mapsto M$ est une solution particulière de l'équation.

C est solution de l'équation différentielle si et seulement si $C - g$ est solution de $y' = -ky$.

Les solutions de cette équation sont de la forme

$A\mathrm{e}^{-kt}$, A réel.

Donc C est de la forme $M + A\mathrm{e}^{-kt}$, A réel.

$C(0) = 0 \Leftrightarrow M + A\mathrm{e}^{-k\times 0} = 0 \Leftrightarrow A = -M$

Donc $C(t) = M - M\mathrm{e}^{-kt}$.

2. $C'(t) = kM\mathrm{e}^{-kt} \geqslant 0$ pour tout réel t car $M > 0$ et $k \geqslant 0$.

Donc C est croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{t\to+\infty} C(t) = M$

3. Dans ce cas, $M = 180$.

$C(15) = 90 \Leftrightarrow 180 - 180\mathrm{e}^{-15k} = 90 \Leftrightarrow k = \dfrac{\ln(2)}{15}$

Donc $C(t) = 180 - 180\mathrm{e}^{-\frac{\ln(2)}{15}t}$.

$C(t) > 170 \Leftrightarrow 180 - 180\mathrm{e}^{-\frac{\ln(2)}{15}t} = 170$

$$\Leftrightarrow t = \frac{15\ln(18)}{\ln(2)} \approx 62,5$$

Le maïs sera à moins de 10 cm de sa taille maximale au bout de 63 jours.

94. 1. $T' = -0,1(T - 20)$

2. a) Si T est constante $T' = 0$ et $-0,1(20 - 20) = 0$, la fonction constante 20 est donc solution.

b) $T(t) = 20 + K\mathrm{e}^{-0,1t}$ avec $T(0) = 100 = 20 + K\mathrm{e}^{-0,1\times 0}$ d'où $K = 80$. $T(t) = 20 + 80\mathrm{e}^{-0,1t}$

95. 1. $100y' + 12y = 0 \Leftrightarrow y' = -0,12y$

Les solutions de cette équation sont de la forme $K\mathrm{e}^{-0,12x}$, K réel.

$y(0) = 100 \Leftrightarrow K\mathrm{e}^{-0,12x} = 100 \Leftrightarrow K = 100$

Donc la solution est $y : x \mapsto 100\mathrm{e}^{-0,12x}$.

2. Les valeurs de a et b correspondent aux extrémités d'un encadrement d'amplitude 0,01 de l'antécédent de 80 par f, la solution trouvée en **1.**, obtenue par dichotomie.

Équations différentielles $y' = ay + \varphi$, ou s'y ramenant

96. 1. a) $g : x \mapsto 1$

b) y est solution de (F) si et seulement si $y - g$ est solution de $y' = -y$.

Les solutions de cette équation sont de la forme $K\mathrm{e}^{-x}$, K réel.

L'ensemble des solutions de (F) est donc

$\{x \mapsto 1 + K\mathrm{e}^{-x}, K \text{ réel}\}$.

2. $f'(x) + (1 + \tan(x))f(x) = \cos(x)$

$$\begin{aligned}
&g'(x)\cos(x) - g(x)\sin(x) \\
&+ (1+\tan(x))g(x)\cos(x) = \cos(x) \\
&g'(x)\cos(x) - g(x)\sin(x) \\
&+ g(x)\cos(x) + g(x)\cos(x)\tan(x) = \cos(x) \\
&g'(x)\cos(x) - g(x)\sin(x) \\
&+ g(x)\cos(x) + g(x)\cos(x)\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \cos(x) \\
&g'(x)\cos(x) - g(x)\sin(x) \\
&+ g(x)\cos(x) + g(x)\sin(x) = \cos(x) \\
&g'(x)\cos(x)g(x)\cos(x) = \cos(x) \\
&g'(x) + g(x) = \cos(x)
\end{aligned}$$

$\cos(x) \neq 0$ pour $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

3. Les solutions de (F) sont $g_k : x \mapsto 1 + K\mathrm{e}^{-x}$, K réel.

Donc les solutions de (E) sont $f_k : x \mapsto (1 + K\mathrm{e}^{-x})\cos(x)$ K réel.

$f(0) = 0 \Leftrightarrow (1 + K\mathrm{e}^{-0})\cos(0) = 0$

$\Leftrightarrow K = -1$

Donc $f(x) = (1 - \mathrm{e}^{-x})\cos(x)$.

97. 1. $p'(x) + 3p(x) = \mathrm{e}^{2x} \Leftrightarrow 2a\mathrm{e}^{2x} + 3a\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}$

$\Leftrightarrow 5a\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}$

$\Leftrightarrow a = \dfrac{1}{5}$

2. y est solution de (E) si et seulement si $y - p$ est solution de $y' = -3y$.

Les solutions de cette équation sont de la forme $K\mathrm{e}^{-3x}$, K réel.

Donc les solutions de (E) sont $y_k : x \mapsto \dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{2x} + K\mathrm{e}^{-3x}$.

$y(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{5}e^{2\times 0} + Ke^{-3\times 0} = 1 \Leftrightarrow K = \frac{4}{5}$

Donc $y(x) = \frac{1}{5}e^{2x} + \frac{4}{5}e^{-3x}$.

98. A. 1. Les solutions sont $x \mapsto Ce^{-2x}$, C constante réelle.

2. Avec $C = \frac{9}{2}$ on obtient la fonction h.

3. g est dérivable et $g'(x) = 9e^{-3x}$ et donc

$g'(x) + 2g(x) = 3e^{-3x}$.

4. Comme $f = g + h$ alors $f' = g' + h'$ donc pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) + 2f(x) &= g'(x) + 2g(x) + h'(x) + 2h(x) \\ &= 3e^{-3x} + 0 = 3e^{-3x}. \end{aligned}$$

Ainsi f est solution de (E).

B. 1. On factorise par $3e^{-2x}$,

$f(x) = 3e^{-2x}\left(\frac{3}{2} - \frac{e^{-3x}}{e^{-2x}}\right) = 3e^{-3x}\left(\frac{3}{2} - e^{-x}\right)$

2. En $+\infty$: par composition

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$, de même

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, on en déduit par opérations que

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

En $-\infty$: par composition

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} = +\infty$, de même $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, on en déduit par opérations que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

3.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	0

$$\begin{aligned} f'(x) &= -9e^{-2x} + 9e^{-3x} \\ &= 9e^{-2x}(-1 + e^{-x}) \end{aligned}$$

Comme $9e^{-2x}$ est positif alors $f'(x)$ est du signe de $-1 + e^{-x}$, donc positif pour $x \leqslant 0$.

4. D'après l'expression de la question **B. 1**, et comme pour tout réel x, $3e^{-2x} \neq 0$, on a :

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} - e^{-x} = 0$

$\Leftrightarrow x = \ln\frac{2}{3} \approx -0{,}4$ (à 0,01 près). La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe (Ox) en un seul point A de coordonnées $\left(\ln\frac{2}{3}\,;0\right)$.

Intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe (Oy) : il s'agit du point de coordonnées B(0 ; f(0)) c'est-à-dire $\left(0\,;\frac{3}{2}\right)$.

99. Travail de l'élève.

100. Travail de l'élève.

Exercices bilan p. 225-226

101. Temps de refroidissement

1. a) La fonction constante est $f : x \mapsto 20$.

b) y est solution de (E) si et seulement si $y - f$ est solution de $y' = -0{,}04y$.

Les solutions de cette équation sont de la forme $Ke^{-0{,}04t}$, K réel.

Donc les solutions de (E) sont $y_k : t \mapsto 20 + Ke^{-0{,}04t}$.

c) $g(0) = 100 \Leftrightarrow 20 + Ke^{-0{,}04\times 0} = 100 \Leftrightarrow K = 80$

Donc $g(t) = 20 + 80e^{-0{,}04t}$.

2. a) $g(30) = 20 + 80e^{-0{,}04\times 30} = 20 + 80e^{-1{,}2} \approx 44 > 37$

Donc la grand-mère à mal évalué le temps nécessaire.

b) $g(t) = 37 \Leftrightarrow 20 + 80e^{-0{,}04t} = 37$

$$\Leftrightarrow t = 25\ln\left(\frac{80}{17}\right) \approx 38{,}72$$

La température sera de 37° au bout d'environ 38 minutes et 43 secondes.

c)

```
t←0
Tant que 20+80e^(-0,04t) > 30
    t←t+1
Fin tant que
Afficher t
```

102. Équation de la forme $y' = ay + \varphi$, où φ est une fonction

1. $g'(x) = e^x + xe^x = g(x) + e^x$ donc g est bien solution de (E).

2. a) $f'(x) = f(x) + e^x$

$f'(x) - g'(x) = f(x) + e^x - g'(x)$

$f'(x) - g'(x) = f(x) + e^x - (g(x) + e^x)$

$f'(x) - g'(x) = f(x) - g(x)$

Donc f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de $y' = y$.

b) $f - g$ est donc de la forme Ke^x, K réel.

Donc f est de la forme $xe^x + Ke^x$, K réel.

3. $f(1) = 2 \Leftrightarrow e^1 + Ke^1 = 2$

$\Leftrightarrow K = 2e^{-1} - 1$

Donc la solution est $f : x \mapsto xe^x + (2e^{-1} - 1)e^x$.

103. Déterminer une primitive

1. $F'(-1) = f(-1) = (-(-1)^2 + (-1) + 2)e^{-1} = 0$

$F'(2) = f(2) = (-2^2 + 2 + 2)e^2 = 0$

2. a) $F'(x) = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx - 1)e^x$

$= (ax^2 + (2a + b)x + b - 1)e^x$

b) $F'(-1) = 0$

$\Leftrightarrow (a(-1)^2 + (2a + b)(-1) + b - 1)e^{-1} = 0$

$\Leftrightarrow (-a - 1)e^{-1} = 0$

$\Leftrightarrow a = -1$

$F'(2) = 0$

$\Leftrightarrow (-1 \times 2^2 + (-2 + b) \times 2 + b - 1)e^2 = 0$

$\Leftrightarrow (3b - 9)e^{-1} = 0$

$\Leftrightarrow b = 3$

Donc $F(x) = (-x^2 + 3x - 1)e^x$.

104. Un modèle de bénéfice

1. $g : t \mapsto 30$ est une solution particulière de l'équation.

f est solution de l'équation différentielle si et seulement si $f - g$ est solution de $y' = -\dfrac{1}{2}y$.

Les solutions de cette équation sont de la forme $Ke^{-\frac{1}{2}x}$, K réel.

Donc f est de la forme $30 - Ke^{-\frac{1}{2}x}$, K réel.

$f(0) = -25 \Leftrightarrow 30 + Ke^{-\frac{1}{2}\times 0} = -25 \Leftrightarrow K = -55$

Donc $f(x) = 30 - 55e^{-\frac{1}{2}x}$.

2. À l'aide de la calculatrice, on constate que la somme des carrés des écart est d'environ $0,08 < 0,5$. L'approximation par f semble donc satisfaisante.

3. a) $f(x) > 29,8 \Leftrightarrow 30 - 55e^{-\frac{1}{2}x} > 29,8$

$\Leftrightarrow x > 2\ln(275) \approx 11,2$

Le bénéfice dépassera 29 800 euros au bout en 2011.

b) $e^{-\frac{1}{2}x} > 0$ pour tout réel x donc

$f(x) = 30 - 55e^{-\frac{1}{2}x} < 30$ pour tout réel x. Le bénéfice ne peut donc pas atteindre 30 000 euros.

105. QCM

1. a)

2. d)

106. Fonctionnement d'un stimulateur cardiaque

A. 1. a) $\dfrac{1}{RC} = \dfrac{1}{4 \times 10^{-7} \times 2 \times 10^6} = 1,25$

Donc u vérifie $u' + 1,25u = 0$.

b) $y' + 1,25y = 0 \Leftrightarrow y' = -1,25y$

Les solutions sont donc $y_K : t \mapsto Ke^{-1,25t}$, K réel.

c) u est solution de l'équation différentielle donc u est de la forme $Ke^{-1,25t}$, K réel.

$u(0) = 5,6 \Leftrightarrow Ke^{-1,25\times 0} = 5,6 \Leftrightarrow K = 5,6$.

Donc $u(t) = 5,6e^{-1,25t}$.

2. a) $u'(t) = -7e^{-1,25t} < 0$ pour tout réel t.

Donc u est décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

b) u représente la tension au bornes du condensateur, celui se déchargeant avec le temps, ce résultat était prévisible.

B. 1. a) $(1 - 0,63) \times u(0) = 0,37 \times 5,6 = 2,072$

b) $5,6e^{-1,25t} = 2,072$

$\Leftrightarrow e^{-1,25t} = 0,37$

$\Leftrightarrow t = -\dfrac{\ln(0,37)}{1,25}$

c) $-\dfrac{\ln(0,37)}{1,25} \approx 0,80$ donc le stimulateur envoie une impulsion électrique au cœur toutes les 0,8 seconde environ.

d) $\dfrac{60}{0,8} = 75$ le stimulateur simule donc un pouls de 75 pulsations par minutes, ce qui est compris entre 50 et 80. Ce rythme correspond donc bien à un adulte au repos et en bonne santé.

107. Satellites

A. 1. Les solutions sont $x \mapsto Ke^{0,025h}$, K réel.

2. La solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition $T(800) = 2\,000$ est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $T(h) = 2\,000e^{0,025h-20}$.

B. 1. Détermine la plus petit valeur K, à 0,5 près pour laquelle $T(500)$ dépasse 1 400 m.

2. Il affiche 18,5.

C. 1. Le temps restant avant la rentrée atmosphérique du satellite Hubble est d'environ 5 432 jours.

2. a) $(h + 10) = 0,132e^{0,025(h+10-150)}$
$= 0,132e^{0,025(h-150+0,25)}$
$= 0,132e^{0,025(h-150)} \times e^{0,25}$

b) $e^{0,25} \approx 1,284 \approx \left(1+\dfrac{28}{100}\right)$

Ainsi, augmenter l'altitude h de 10 km revient à augmenter d'environ 28 % le temps restant avant la rentrée atmosphérique du satellite Hubble.

Préparer le BAC
Je me teste p. 228

108. D

109. A

110. A

111. B

112. C

113. A

114. D

115. A

Préparer le BAC
Je révise p. 229

116. Découvrir une primitive

1. $G'(x) = ae^{x-1} + (ax + b)e^{x-1} + 1 = (ax + a + b)e^{x-1} + 1$

Par identification avec g, $a = 1$ et $b = -1$.

2. $1 - \dfrac{e^x}{e^x+1} = \dfrac{e^x+1-e^x}{e^x+1} = \dfrac{1}{e^x+1} = h(x)$

Une primitive de h est $H : x \mapsto x - \ln(e^x + 1)$.

117. Culture de microbes

1. Les solutions de l'équation sont de la forme Ce^{kt}, C réel.

$y(0) = N \Leftrightarrow Ce^{k\times 0} = N \Leftrightarrow C = N$

Donc $y(t) = Ne^{kt}$.

2. $y(2) = 4N \Leftrightarrow Ne^{2k} = 4N \Leftrightarrow k = \ln(2)$

Donc $y(t) = Ne^{\ln(2)t} = 2^t N$.

$y(3) = 2^3 N = 8N$

Au bout de 3 heures, il y a 8 N microbes.

3. $y(5) = 6\,400 \Leftrightarrow 2^5 N = 6\,400 \Leftrightarrow N = 200$

118. Étude d'une fonction

1. Les solutions de (1) sont les fonctions $y_k : x \mapsto e^{2x}$, K réel.

Les solutions de (2) sont les fonctions $y_k : x \mapsto Ke^x$, K réel.

2. a) Graphiquement, $f(0) = 1$.

Le coefficient directeur de T est $\dfrac{-2-1}{-1-0} = 3$ et son ordonnée à l'origine est 1, donc T a pour équation $y = 3x + 1$.

$f'(0)$ est le coefficient directeur de T, soit $f'(0) = 3$.

b) $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ donc f est de la forme $Ae^{2x} - Be^x$, A et B réels.

$f(0) = 1 \Leftrightarrow Ae^{2\times 0} - Be^0 = 1 \Leftrightarrow A = 1 + B$

f' est de la forme $2Ae^{2x} - Be^x$.

$f'(0) = 3 \Leftrightarrow 2Ae^{2\times 0} - Be^0 = 3$
$\Leftrightarrow 2A - B = 3$
$\Leftrightarrow 2(1 + B) - B = 3$
$\Leftrightarrow B = 1$

Donc $A = 1 + B = 2$

Donc $f_1(x) = 2e^{2x}$ et $f_2(x) = e^x$.

Donc $f(x) = 2e^{2x} - e^x$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$f(x) = e^x(2e^x - 1)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

d) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} - e^x = 0$
$\Leftrightarrow 2e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\ln(2)$

119. Primitive et aire sous une courbe

1. a) $2(u'(x)v(x)+u(x)v'(x)) = 2\left(1\times e^{\frac{1}{2}x} + x\times\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}\right)$

$= (x+2)e^{\frac{1}{2}x} = f(x)$

b) Une primitive de f est $F : x \mapsto 2u(x)v(x) = 2xe^{\frac{1}{2}x}$.

2. a) Pour $n = 3$, l'algorithme renvoie

$s = \frac{1}{3}f(0)+\frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}\right)$, soit la somme des aires des trois rectangles colorés du graphique.

b) Lorsque n devient grand, la valeur de s_n proposée se rapproche de l'aire du domaine situé entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

120. Problème ouvert (1)

Pour $x \leqslant 2$, on résout $y'(x)+y(x)=1$.

$f : x \mapsto 1$ est une solution particulière de cette équation.

y est solution de cette équation si et seulement si $y - f$ est solution de $y' = -y$.

Les solutions de cette équation sont de la forme Ke^{-x}, K réel.

Donc les solutions de $y'(x)+y(x)=1$ sont :

$y_K : x \mapsto 1+Ke^{-x}$, K réel.

$y(0)=0 \Leftrightarrow 1+Ke^{-0}=0 \Leftrightarrow K=-1$

Donc la solution de $y'(x)+y(x)=1$ est $f_1 : x\mapsto 1-e^{-x}$.

Pour $x > 2$, on résout $y'(x)+y(x)=0$.

$y'(x)+y(x)=0 \Leftrightarrow y'(x) = -y(x)$

Les solutions de cette équation sont de la forme

Ke^{-x}, K réel.

Ainsi la solution de $y'(x)+y(x)=g(x)$ est

$$y(x)=\begin{cases}1-e^{-x} \text{ si } x\leqslant 2\\ Ke^{-x} \text{ si } x>2\end{cases}$$

y doit être dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$.

Ainsi on doit avoir $1-e^{-2}=Ke^{-2} \Leftrightarrow K=e^2-1$

Donc $y(x) = \begin{matrix}1-e^{-x} \text{ si } x\leqslant 2\\ (e^2-1)e^{-x} \text{ si } x>2\end{matrix}$

121. Problème ouvert (2)

$y'(x)=2C_1e^{2x}+C_2e^x = 2y(x)-C_2e^x$

L'équation différentielle est $y'(x)=2y(x)-C_2e^x$.

Exercices vers le supérieur p. 230-233

122. Deux modèles pour une même étude

A. Un modèle discret

1. a) `L.append(u)` ajoute la valeur de la variable `u` dans la liste `L`.

b) Il y aura 50 nombres dans la liste `L`.

2. a) $f'(x)=\frac{1}{10}(20-x)-\frac{1}{10}x = 2-\frac{1}{5}x$

$f'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow 2-\frac{1}{5}x\geqslant 0 \Leftrightarrow x\leqslant 10$

Donc f est strictement croissante sur [0 ; 10] puis strictement décroissante sur [10 ; 20].

b) f est strictement croissante sur [0 ; 10] donc :

- f admet un maximum en $x = 10$, soit

$f(10)=\frac{1}{10}\times 10(20-10)=10$;

- f admet un maximum en $x = 0$, soit

$f(0)=\frac{1}{10}\times 0(20-0)=0$.

Donc $f(x)\in[0\,;10]$ pour tout $x\in[0\,;10]$.

3. Montrons par récurrence la proposition

$P_n : 0\leqslant u_n\leqslant 10$.

Initialisation : (pour $n = 0$) : $u_0 = 1\in[0\,;10]$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : si il existe un entier n tel que P_n est vraie, alors $0\leqslant u_n\leqslant 10$ donc $0\leqslant f(u_n)\leqslant 10$ d'après la question précédente.

$u_{n+1}=f(u_n)$ donc $0\leqslant u_{n+1}\leqslant 10$.

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier n.

4. La fonction f étant strictement croissante sur [0 ; 10], nous pouvons montrer par récurrence que $u_{n+1}>u_n$ pour tout entier n, donc que (u_n) est strictement croissante.

(u_n) est donc strictement croissante et majorée par 10, donc (u_n) est convergente vers un réel ℓ.

$u_{n+1}=f(u_n)$ donc ℓ vérifie $f(\ell)=\ell$.

$$f(\ell)=\ell=\frac{1}{10}\ell(20-\ell)=\ell \Leftrightarrow \ell^2-10\ell=0$$

$$\Leftrightarrow \ell(\ell-10)=0$$

$$\Leftrightarrow \ell=0 \text{ ou } \ell=10$$

Or $u_0 = 1$ et (u_n) est strictement croissante donc $u_n \geqslant 1$ pour tout entier n.

Donc $\ell = 10$.

5.
```
from math import *
N=int(input())
L=[]
u=1
L.append(u)
while u<=5:
    u=(((u*20-u))/10)
    L.append(u)
print(L)
```

B. Un modèle continu

1. a) Si y est solution de (E) alors : $y' = \frac{1}{20}y(10 - y')$

$$z' = -\frac{y'}{y^2} = -\frac{\frac{1}{20}y(10-y)}{y^2}$$

$$= \frac{-10y + y^2}{20y^2} = -\frac{1}{2y} + \frac{1}{20}$$

$$= -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}$$

b) $g : x \mapsto \frac{1}{10}$ est une solution particulière de (E_1).

z est solution de (E_1) si et seulement si $z - g$ est solution de $z' = -\frac{1}{2}z$.

Les solutions de cette équation sont de la forme $Ke^{-\frac{1}{2}x}$, K réel.

Donc les solutions de (E_1) sont : $z_K : x \mapsto \frac{1}{10} + Ke^{-\frac{1}{2}x}$, K réel.

Donc les solutions de (E) sont

$$y_K = \frac{1}{z_K} : x \mapsto \frac{1}{\frac{1}{10} + Ke^{-\frac{1}{2}x}} = \frac{10}{10Ke^{-\frac{1}{2}x} + 1}, \ K \text{ réel.}$$

2. g est solution de (E) donc g est de la forme $\frac{10}{10Ke^{-\frac{1}{2}x} + 1}$, K réel.

$$g(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{10}{10Ke^{-\frac{1}{2}\times 0} + 1} = 1 \Leftrightarrow K = 0{,}9$$

Donc $g(x) = \frac{10}{10 \times 0{,}9e^{-\frac{1}{2}x} + 1} = \frac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x} + 1}$

3. $g'(x) = -\frac{10 \times \left(-\frac{9}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x}}{\left(9e^{-\frac{1}{2}x} + 1\right)^2} = \frac{45e^{-\frac{1}{2}x}}{\left(9e^{-\frac{1}{2}x} + 1\right)^2} > 0$

pour tout $x \in [0 ; +\infty[$.

Donc g est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 10$ donc au fil du temps le nombre de foyer possédant un téléviseur se rapproche de 10 millions.

5.
```
x←0
Tant que 10/(9e^(-1/2 x)+1) ≤ 1
    x←x+1
Fin tant que
Afficher 2005+x
```

123. Progression d'une épidémie

1. Si y est solution de (E) alors $y' = 0{,}05y(10 - y)$ et $y(0) = 0{,}01$

$$f' = -\frac{y'}{y^2} = -\frac{0{,}05y(10-y)}{y^2}$$

$$= \frac{-0{,}5y + 0{,}05y^2}{y^2} = -\frac{0{,}05}{y} + 0{,}05$$

$$= -0{,}05f + 0{,}5$$

$$y(0) = 0{,}01 \Leftrightarrow f(0) = \frac{1}{y(0)} = \frac{1}{0{,}01} = 100$$

2. a) $g : x \mapsto 0{,}1$ est une solution particulière de $f' = -0{,}5f + 0{,}05$.

f est solution de cette équation si et seulement si $f - g$ est solution de $f' = -0{,}5f$.

Les solutions de cette équation sont de la forme $Ke^{-0{,}5x}$, K réel.

Donc les solutions de $f' = -0{,}5f + 0{,}05$ sont

$f_K : x \mapsto 0{,}1 + Ke^{-0{,}5x}$, K réel.

$f(0 = 100 \Leftrightarrow 0{,}1 + Ke^{-0{,}5\times 0} = 100 \Leftrightarrow K = 99{,}9$

Donc $f(x) = 0{,}1 + 99{,}9e^{-0{,}5x}$.

Donc $y(x) = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{0{,}1 + 99{,}9\mathrm{e}^{-0{,}5x}}$.

b) Cet algorithme sert à afficher l'entier x à partir duquel on a $y(x) \geqslant 5$.

3. a) $y(30) = \dfrac{1}{0{,}1 + 99{,}9\mathrm{e}^{-0{,}5\times 30}}$

$= \dfrac{1}{0{,}1 + 99{,}9\mathrm{e}^{-15}} \approx 10.$

Environ 10 % de la population sera infectée au bout de 30 jours.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 10$ donc, à terme, l'infection touchera 10 % de la population.

124. Équations de la forme $y' = ay + \varphi$

a) On cherche a et b tels que $g : x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x)$ soit une solution particulière de l'équation.

$2g'(x) - g(x)$

$= 2(-a\sin(x) + b\cos(x)) - a\cos(x) - b\sin(x)$

$= (2b - a)\cos(x) - (2a + b)\sin(x)$

Par identification avec $\cos(x)$,

$$\begin{cases} 2b - a = 1 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{5} \\ b = \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

y est solution de l'équation si et seulement si $y - g$ est solution de $y' = \dfrac{1}{2}y$.

Les solutions de cette équation sont de la forme $K\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$, K réel.

Donc les solutions de $2y' - y = \cos x$ sont

$y_K : x \mapsto g(x) + K\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} = -\dfrac{1}{5}\cos(x) = \dfrac{2}{5}\sin(x) + K\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$,

K réel.

b) On cherche a et b tels que $g : x \mapsto (ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^{2x}$ soit une solution particulière de l'équation.

$g'(x) - 2g(x)$

$= (2ax + b)\mathrm{e}^{2x} + 2(ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^{2x} - 2(ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^{2x}$

$= (2ax + b)\mathrm{e}^{2x}$

Par identification avec $x\mathrm{e}^{2x}$, $\begin{cases} 2ax = 1 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = 0 \end{cases}$.

Pour $c = 0$, $g : x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{2x}$ est solution particulière à l'équation.

y est solution de l'équation si et seulement si $y - g$ est solution de $y' = 2y$.

Les solutions de cette équation sont de la forme $K\mathrm{e}^{2x}$, K réel.

Donc les solutions de $y' - 2y = x\mathrm{e}^{2x}$ sont

$y_K : x \mapsto g(x) + K\mathrm{e}^{2x} = \left(\dfrac{1}{2}x^2 + K\right)\mathrm{e}^{2x}$, K réel.

125. Sans aide

1. Une solution particulière est

$x \mapsto \dfrac{-1}{5}\cos x + \dfrac{2}{5}\sin x$.

Les solutions générales sont

$x \mapsto \dfrac{-1}{5}\cos x + \dfrac{2}{5}\sin x + K\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$, K réel.

2. Une solution particulière est $x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{2x}$.

Les solutions générales sont

$x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{2x} + K\mathrm{e}^{2x}$, K réel.

126. En économie

1. $g : x \mapsto 0{,}05$ est une solution particulière de $P' = -0{,}4P + 0{,}02$.

P est solution de cette équation si et seulement si $P - g$ est solution de $P' = -0{,}4P$.

Les solutions de cette équation sont de la forme $K\mathrm{e}^{-0{,}4x}$, K réel.

Donc les solutions de $P' = -0{,}4P + 0{,}02$ sont

$P_K : x \mapsto 0{,}05 + K\mathrm{e}^{-0{,}4x}$, K réel.

$P(0) = \dfrac{4}{5} \Leftrightarrow 0{,}05 + K\mathrm{e}^{-0{,}4\times 0} = \dfrac{4}{5} \Leftrightarrow K = 0{,}75$

Donc $P(x) = 0{,}05 + 0{,}75\mathrm{e}^{-0{,}4x}$.

$$f(q) = \frac{1}{P(q)} = \frac{1}{0{,}05 + 0{,}75e^{-0{,}4q}} = \frac{20}{1 + 15e^{-0{,}4q}}$$

$$f(0) = \frac{20}{1 + 15e^{-0{,}4\times 0}} = \frac{5}{4}$$

2. $f'(q) = -\dfrac{20 \times 15 \times (-0{,}4)e^{-0{,}4q}}{(1 + 15e^{-0{,}4q})^2}$

$$= \frac{120e^{-0{,}4q}}{(1 + 15e^{-0{,}4q})^2} > 0$$

pour tout $q \in [0\,;14]$.

Donc f est strictement croissante sur $[0\,;14]$.

2. a) La droite (OQ) passe par les points O(0 ; 0) et Q(q ; $f(q)$).

Son coefficient directeur est donc donné par $\dfrac{y_Q - y_O}{x_Q - x_O} = \dfrac{f(q) - 0}{q - 0} = \dfrac{f(q)}{q}$.

b) Le minimum est réalisé quand la droite (OQ) à un coefficient directeur minimal, soit pour $q = 14$, ce qui correspond à un coût moyen de

$$\frac{f(14)}{14} = \frac{\dfrac{20}{1 + 15e^{-0{,}4\times 14}}}{14} \approx 1{,}4.$$

127. Équation différentielle et changement de variable

1. $f'(t) = -\dfrac{1}{20}f(t)(3 - \ln f(t))$ si et seulement si

$$g'(t) = (\ln(f))'(t) = f'(t)\frac{1}{f(t)}$$

$$= \left(-\frac{1}{20}f(t)\left(3 - \ln f(t)\right)\right)\frac{1}{f(t)}$$

$$= -\frac{3}{20} + \frac{\ln f(t)}{20}$$

$$= \frac{1}{20}g(t) - \frac{3}{20}$$

2. $g : x \mapsto 3$ est une solution particulière de

$$z' = \frac{1}{20}z - \frac{3}{20}.$$

z est solution de cette équation si et seulement si $z - g$ est solution de $z' = \dfrac{1}{20}z$.

Les solutions de cette équation sont de la forme $Ke^{\frac{1}{20}t}$, K réel.

Donc les solutions de $z' = \dfrac{1}{20}z - \dfrac{3}{20}$ sont

$z_K : t \mapsto 3 + Ke^{\frac{1}{20}t}$, K réel.

3. g vérifie $g' = \dfrac{1}{20}g - \dfrac{3}{20}$ donc il existe un réel C tel que $g(t) = 3 + Ce^{\frac{1}{20}t}$.

$g(t) = \ln(f(t))$ donc

$$f(x) = \exp(g(t)) = \exp\left(3 + C\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right).$$

4. a) $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$

b) $f'(t) = -\dfrac{3}{20}e^{\frac{t}{20}}e^{3-3e^{\frac{t}{20}}} < 0$ pour tout réel t.

Donc f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

c) $f(t) < 0{,}02 \Leftrightarrow \exp\left(3 - 3\exp\left(\dfrac{t}{20}\right)\right) < 0{,}02$

$$\Leftrightarrow 3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right) < \ln(0{,}02)$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{20} > \ln\left(1 - \frac{\ln(0{,}02)}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow t > 20\ln\left(1 - \frac{\ln(0{,}02)}{3}\right)$$

128. Équation différentielle du second ordre

1. a) $(f'(x))^2 - (f(x))^2 = 1 \qquad (f'(x))^2 = 1 + (f(x))^2$

Donc $(f(x))^2 \geqslant 1$ pour tout réel x.

En particulier $(f'(x))^2 \neq 0$ donc $f'(x) \neq 0$ pour tout réel x.

b) $(f'(0))^2 - (f(0))^2 = 1$

$\Leftrightarrow (f(0))^2 = (f'(0))^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow f(0) = 0$

2. La dérivée de $(f')^2$ est $2f'' \times f'$.

La dérivée de f^2 est $2f' \times f$.

Pour tout réel x, $(f'(x))^2 - (f(x))^2 = 1$.

Donc, en dérivant on obtient :

$2f''(x)f'(x) - 2f'(x)f(x) = 0$

$\Leftrightarrow 2f'(x)(f''(x) - f(x)) = 0.$

Or $2f'(x) \neq 0$ pour tout réel x donc on a $f''(x) - f(x) = 0$, soit $f''(x) = f(x)$ pour tout réel x.

3. a) $u(0) = f'(0) + f(0) = 1 + 0 = 1$

$v(0) = f'(0) - f(0) = 1 - 0 = 1$

b) $f'' = f$ donc

$u' = (f' + f)' = f'' + f' = f + f' = u.$

$v' = (f' - f)' = f'' - f' = f - f' = -(f' - f) = -v$

c) Les solutions de l'équation $u' = u$ sont de la forme Ke^x, K réel.

$u(0) = 1 \Leftrightarrow Ke^0 = 1 \Leftrightarrow K = 1.$

Donc $u(x) = e^x$.

Les solutions de l'équation $v' = -v$ sont de la forme Ke^{-x}, K réel.

$v(0) = 1 \Leftrightarrow Ke^{-0} = 1 \Leftrightarrow K = 1.$

Donc $v(x) = e^{-x}$.

d) $u - v = (f' + f) - (f' - f) = 2f$

Donc $f(x) = \dfrac{u(x) - v(x)}{2} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

4. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

b) $f'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$ pour tout réel x.

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

5. a) La fonction est continue, car dérivable, et strictement croissante sur $]-\infty\,;+\infty[$.

De plus $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty < m < +\infty = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ pour tout réel m.

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = m$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = 3 \Leftrightarrow \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = 3$

$\Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 6 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 1 = 6e^x$

$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 6e^x - 1 = 0$

On pose $X = e^x$ et on résout $X^2 - 6X - 1 = 0$.

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 40 > 0$

L'équation a donc deux solutions réelles :

$X_1 = \dfrac{-(-6) - \sqrt{40}}{2 \times 1} = 3 - \sqrt{10}$ et

$X_2 = \dfrac{-(-6) + \sqrt{40}}{2 \times 1} = 3 + \sqrt{10}.$

Donc $(e^x)^2 - 6e^x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow e^x = 3 - \sqrt{10}$ ou $e^x = 3 + \sqrt{10}$

$\Leftrightarrow x = \ln(3 + \sqrt{10})$

car $3 - \sqrt{10} < 0$.

Donc $x = \ln(3 + \sqrt{10}) \approx 1{,}82.$

129. QCM

1. c)

2. b)

130. Commande d'une substance radioactive

Soit N la fonction donnant le nombre d'unités en fonction du temps t (en jours).

La loi de désintégration donne $N'(t) = -\lambda N(t)$.

Les solutions de cette équation sont de la forme $Ke^{-\lambda t}$, K réel.

La demi-vie de la particule est de 27,8 jours.

$N(t + 27{,}8) = \dfrac{N(t)}{2} \Leftrightarrow Ke^{-\lambda(t+27{,}8)} = \dfrac{K}{2}e^{-\lambda t}$

$\Leftrightarrow e^{-\lambda t - 27{,}8\lambda} = \dfrac{1}{2}e^{-\lambda t}$

$\Leftrightarrow -\lambda t - 27{,}8\lambda = -\ln(2) - \lambda t$

$\Leftrightarrow \lambda = \dfrac{\ln(2)}{27{,}8}$

Soit N_0 la quantité initiale, alors

$N(0) = N_0 \Leftrightarrow Ke^{-\lambda \times 0} = N_0 \Leftrightarrow K = N_0$.

Donc $N(t) = N_0 e^{-\frac{\ln(2)}{27{,}8}t}$

$N(2) > 35 \Leftrightarrow N_0 e^{-\frac{\ln(2)}{27{,}8} \times 2} = 35$

$\Leftrightarrow N_0 > 35 e^{\frac{\ln(2)}{13{,}9}} \approx 36{,}8$

Il faut donc commander au moins 37 unités.

131. Équation logistique

$$P'(t) = -\frac{N'(t)}{N(t)^2} = -\frac{0{,}07N(t)(1-10^{-3}N(t))}{N(t)^2}$$
$$= -\frac{0{,}07N(t) - 0{,}07 \times 10^{-3}N(t)^2}{N(t)^2}$$
$$= -0{,}07\frac{1}{N(t)} + 7 \times 10^{-5}$$
$$= -0{,}07P(t) + 7 \times 10^{-5}$$

Donc P est solution de l'équation

$y' = -0{,}07y + 7 \times 10^{-5}$.

$g : x \mapsto 10^{-3}$ est une solution particulière de cette équation.

y est solution de l'équation si et seulement si $y - g$ est solution de $y' = -0{,}07y$.

Les solutions de cette équation sont de la forme $Ke^{-0{,}07t}$, K réel.

Donc les solutions de $y' = -0{,}07y + 7 \times 10^{-5}$ sont

$y_K : t \mapsto 10^{-3} + Ke^{-0{,}07t}$, K réel.

Donc P est de la forme $10^{-3} + Ke^{-0{,}07t}$, K réel.

De plus $P(0) = \frac{1}{N(0)} = \frac{1}{100} = 10^{-2}$

$P(0) = 10^{-2} \Leftrightarrow 10^{-3} + Ke^{-0{,}07\times 0} = 10^{-2} \Leftrightarrow K = 0{,}009$

donc $P(t) = 10^{-3} + 0{,}009e^{-0{,}07t}$.

132. Réaction chimique

Donc $N(t) = \frac{1}{P(t)} = \frac{1}{10^{-3} + 0{,}009e^{-0{,}07t}}$

pour $n = 0$, $C'(t) = -k$, solution : $x \mapsto -kt + C_0$

pour $n = 1$, $C'(t) = -kC(t)$, solution : $x \mapsto C_0e^{-kt}$

pour $n = 2$, $C'(t) = -kC^2(t)$

$$\Leftrightarrow -\frac{C'(t)}{C^2(t)} = k \Leftrightarrow \left(\frac{1}{C}\right)' = k \Leftrightarrow C(t) = \frac{1}{kt + K},$$

K réel. Solution : $x \mapsto \frac{1}{kt + C_0}$.

133. Croissance d'une population

1. On pose $y = \frac{1}{p}$.

$$y' = -\frac{p'}{p^2} = -\frac{kp(M-p)}{p^2} = -\frac{kM}{p} + k$$
$$= -kMy + k$$

$g : x \mapsto \frac{1}{M}$ est une solution particulière de l'équation $y' = -kMy + k$.

y est solution de l'équation si et seulement si $y - g$ est solution de $y' = -kMy$.

Les solutions de cette équation sont de la forme Ke^{-kMt}, K réel.

Donc les solutions de $y' = -kMy + k$ sont

$y_K : t \mapsto \frac{1}{M} + Ke^{-kMt}$, K réel.

$$y(0) = \frac{1}{p(0)} = \frac{1}{p_0} \Leftrightarrow \frac{1}{M} + Ke^{-kM\times 0} = \frac{1}{p_0}$$
$$\Leftrightarrow K = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{M}$$

Donc $y(t) = \frac{1}{M} + \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{M}\right)e^{-kMt}$.

$M = 10\,000$, $k = 0{,}0001$ et $p_0 = 1\,000$ donc

$y(t) = 10^{-4} + 9 \times 10^{-4}e^{-t}$

donc $p(t) = \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{10^{-4} + 9 \times 10^{-4}e^{-t}}$.

2. $p(2) = \frac{1}{10^{-4} + 9 \times 10^{-4}e^{-2}} \approx 4\,509$

Au bout de deux ans, la population sera de 4 509 individus.

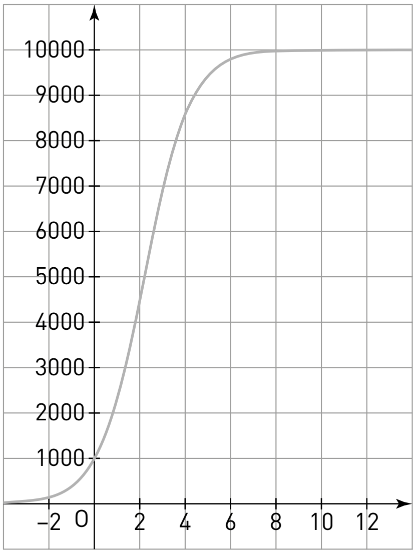
$p(5) = \frac{1}{10^{-4} + 9 \times 10^{-4}e^{-5}} \approx 9428$

Au bout de deux ans, la population sera de 9 428 individus.

3. $$p(t) \geqslant 9999{,}5 \Leftrightarrow \frac{1}{10^{-4} + 9 \times 10^{-4}e^{-t}} \geqslant 9999{,}5$$
$$\Leftrightarrow e^{-t} \leqslant \frac{10^{-5}}{1{,}79991}$$
$$\Leftrightarrow t \geqslant -\ln\left(\frac{10^{-5}}{1{,}79991}\right) \approx 12{,}1$$

On atteint la taille limite au bout de 13 années.

4.



134. Vrai ou Faux ? (1)

1. a) Vrai **b) Vrai** **c) Faux**

2. a) Faux **b) Faux**

c) Faux **d) Faux**

3. a) Vrai **b) Faux** **c) Vrai**

135. Vrai ou Faux ? (2)

1. Faux

2. Faux

3. Vrai

4. Vrai

136. Croissance d'une population de rongeurs

1. a) Les solutions sont les fonctions $y_K : t \mapsto Ke^{\frac{1}{4}t}$, K réel.

b) $g(0) = 1 \Leftrightarrow Ke^{\frac{1}{4}\times 0} = 1 \Leftrightarrow K = 1$

donc $g(t) = e^{\frac{1}{4}t}$.

c) $g(t) \geqslant 3 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{4}t} \geqslant 3 \Leftrightarrow t \geqslant 4\ln(3) \approx 4{,}4$

Au bout de 5 ans, la population dépassera 300 individus.

2. a) $u'(t) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{(u(t))^2}{12}$ si et seulement si

$$h'(t) = -\frac{u'(t)}{(u(t))^2} = -\frac{\frac{u(t)}{4} - \frac{(u(t))^2}{12}}{(u(t))^2}$$

$$= -\frac{1}{4u(t)} + \frac{1}{12} = -\frac{h(t)}{4} + \frac{1}{12}$$

de plus $h(0) = \dfrac{1}{u(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$.

b) $g : x \mapsto \dfrac{1}{3}$ est une solution particulière de l'équation $y' = -\dfrac{y}{4} + \dfrac{1}{12}$.

y est solution de l'équation si et seulement si $y - g$ est solution de $y' = -\dfrac{1}{4}y$.

Les solutions de cette équation sont de la forme $Ke^{-\frac{1}{4}t}$, K réel.

Donc les solutions de $y' = -\dfrac{y}{4} + \dfrac{1}{12}$ sont

$y_K : t \mapsto \dfrac{1}{3} + Ke^{-\frac{1}{4}t}$, K réel.

h vérifie cette équation donc h est de la forme

$\dfrac{1}{3} + Ke^{-\frac{1}{4}t}$, K réel.

$h(0) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} + Ke^{-\frac{1}{4}\times 0} = 1 \Leftrightarrow K = \dfrac{2}{3}$

donc $h(t) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}t}$

donc $u(t) = \dfrac{1}{h(t)} = \dfrac{1}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}t}} = \dfrac{3}{1 + 2e^{-\frac{1}{4}t}}$.

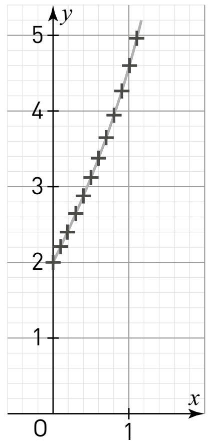
c) $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = 3$ donc la population se rapproche de 300 quand t tend vers $+\infty$.

137. Approche d'une solution par la méthode d'Euler

À partir de la méthode d'Euler, nous obtenons la suite de points $A_n(x_n\ ;\ y_n)$ où $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ et

$\begin{cases} x_{n+1} = 0{,}1x_n \\ y_{n+1} = y_n + 0{,}1(y_n - x_n) \end{cases}$ pour tout entier n.

On obtient la courbe suivante.



On résout $y' = y - x$.

$g : x \mapsto x + 1$ est une solution particulière de cette équation.

y est solution de l'équation si et seulement si $y - g$ est solution de $y' = y$.

Les solutions de cette équation sont de la forme Ke^x, K réel.

Donc les solutions de $y' = y - x$ sont

$y_K : x \mapsto x + 1 + Ke^x$, K réel.

$y(0) = 2 \Leftrightarrow 0 + 1 + Ke^0 = 2 \Leftrightarrow K = 1$

Donc la solution est $y(x) = x + 1 + e^x$.

En traçant cette courbe sur le graphique précédent, on peut constater que l'écart est faible entre les deux courbes.

138. Démontrer l'unicité d'une solution

Si $xy'(x) + y(x) = 0$ alors, en dérivant chaque membre, $y(x) + xy(x) + y'(x) = 0$

donc $xy''(x) = 0$ donc $y'(x) = 0$ pour tout $x \neq 0$.

Donc, y' étant continue sur $\mathbb{R}$ on a nécessairement y' fonction constante sur $\mathbb{R}$, soit $y : x \mapsto k$ où k réel.

Or $xy'(x) + y(x) = 0 \Leftrightarrow x \times 0 + y(x) = 0$

$\Leftrightarrow y(x) = 0$.

L'équation admet donc une unique solution, la fonction constante 0.

139. Résoudre par disjonction de cas

1. Si $y(x) \geqslant x$ alors $\left|y(x) - x\right| = y(x) - x$.

On résout $y'(x) = y(x) - x$.

$g : x \mapsto x + 1$ est une solution particulière de l'équation.

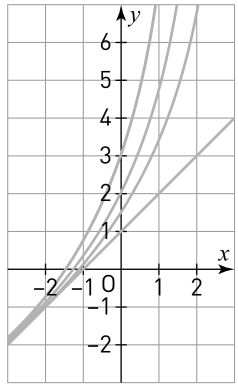
y est solution de l'équation si et seulement si $y - g$ est solution de $y' = y$.

Les solutions de cette équation sont de la forme Ke^x, K réel.

Donc les solutions de $y'(x) = y(x) - x$ sont

$y_K : x \mapsto x + 1 + Ke^x$, K réel.

$y_K(x) \geqslant x \Leftrightarrow x + 1 + Ke^x \geqslant x \Leftrightarrow Ke^x \geqslant -1$ cette inégalité étant valable pour tout x pour $K \geqslant 0$. Les solutions de l'équation vérifiant la condition initiale sont donc : $y_K : x \mapsto x + 1 + Ke^x$, $K \geqslant 0$.



2. Si $y(x) \leqslant x$ alors $\left|y(x) - x\right| = -y(x) + x$.

On résout $y'(x) = -y(x) + x$.

$g : x \mapsto x - 1$ est une solution particulière de l'équation.

y est solution de l'équation si et seulement si $y - g$ est solution de $y' = -y$.

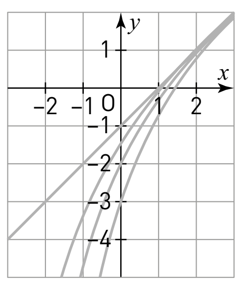
Les solutions de cette équation sont de la forme Ke^{-x}, K réel.

Donc les solutions de $y'(x) = -y(x) + x$ sont

$y_K : x \mapsto x - 1 + Ke^{-x}$, K réel.

$y_K(x) \leqslant x \Leftrightarrow x - 1 + Ke^{-x} \leqslant x \Leftrightarrow Ke^{-x} \leqslant 1$ cette inégalité étant valable pour tout x pour $K \leqslant 0$. Les solutions de l'équation vérifiant la condition initiale sont donc :

$y_K : x \mapsto x - 1 + Ke^x$, $K \leqslant 0$.



140. Équations et conditions

1. a) $h'(x) = (f'(x) - 3f(x))e^{-3x}$

b) f est solution de (E) donc

$$f'(x) - 3f(x) = \frac{3}{1+e^{-3x}}$$

ainsi $h'(x) = \frac{3}{1+e^{-3x}}e^{-3x}$.

2. Dans $h'(x)$ on reconnaît la forme $\frac{-u'}{u}$ avec u positive ainsi

$h(x) = -\ln(1 + e^{-3x}) + k$, k réel.

3. $f(x) = h(x)\ e^{3x} = (-\ln(1 + e^{-3x}) + k)e^{3x}$, k réel.

4) $f(0) = (-\ln(1 + 1) + k) = 0$

Donc $k = \ln 2$.

La solution est $x \mapsto (-\ln(1 + e^{-3x}) + \ln 2)e^{3x}$.

141. Chute d'une goutte d'eau

1. a) $g : x \mapsto 9{,}81q$

b) $g' = \frac{-1}{q}g + 9{,}81$

f est solution $\Leftrightarrow f' = \frac{-1}{q}f + 9{,}81$

$\Leftrightarrow f' - g' = \frac{-1}{q}(f - g)$

$\Leftrightarrow (f - g)' = \frac{-1}{q}(f - g)$

$\Leftrightarrow f - g$ est solution de $y' = -\frac{1}{q}y$.

On en déduit $v(t) = 9{,}81q\left(1 - e^{-\frac{1}{q}t}\right)$ puisque $v(0) = 0$.

2. a) $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{1}{q}t} = 0$ par composition donc

$\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 9{,}81q$ par opérations.

b) Vérifier que $v(5q) > 0{,}99 \times 9{,}81q$.

$v(5q) = 9{,}81q(1 - e^{-5}) \approx 0{,}9932 \times 9{,}81q$

L'affirmation est donc correcte.

Travaux pratiques

TP 1. Méthode d'Euler pour approcher la courbe d'une solution d'équation différentielle

- **Durée estimée :** 55 min
- **Objectif :** Utiliser l'équation différentielle pour un calcul répértitif, après avoir été présentée, mettre en œuvre la méthode avec l'outil Python.

A. Courbe d'Euler et solution de l'équation différentielle $y' = 3y + 5$ avec $y(0) = 1$

2. a)

```
saisir les variables x, y, h, n
Pour i allant de 1 à n :
    x <- x + h
    Y <- y(1 + 3h) + 5h
Fin Pour
```

b) Avec Python et l'affichage des points A_i.

```
from math import *
from pylab import *
def méthode_euler(x,y,h,n):
    X_liste=[x]
    Y_liste=[y]
    xlim(0,5)
    ylim(0,100)
    for i in range(n):
        x=x+h
        y=y*(3*h+1)+5*h
        X_liste.append(x)
        Y_liste.append(y)
    return(X_liste, Y_liste)
X,Y=méthode_euler(0, 1, 0.1, 100)
plot(X, Y, "r+")
show()
```

B. Pour aller plus loin

```
from math import *
from pylab import *
def méthode_euler(x, y, h, n):
    X_liste=[x]
    Y_liste=[y]
    xlim(-3, 3)
    ylim(0, 20)
    for i in range(n):
        y=y*(2*h+1)+x*cos(x*pi/180)*h
        x=x+h
        X_liste.append(x)
        Y_liste.append(y)
    return(X_liste, Y_liste)
plot(méthode_euler(pi, 0, 0.1, 100),"r+")
show()
```

TP 2. Étude d'un exemple de dynamique de population

- **Durée estimée :** 40 min
- **Objectif :** Appliquer les équations différentielles avec un modèle économique historique, sur un problème économique concret.

A. Présentation

1. En remplaçant N respectivement par 0 puis par K on obtient $N' = 0$.

Si $0 < N < \mathrm{K}$ alors $0 < \dfrac{N}{\mathrm{K}} < 1$ ainsi l'équation logistique donne $N'(t) > 0$ et sinon $N'(t) < 0$.

2. Si $0 < N < \mathrm{K}$ alors $N'(t) > 0$ donc la fonction N est croissante. Décroissante sinon.

B. Exemple : un problème économique, le nombre de franchises

1. $N'(t) = 0{,}4N(t)\left(1 - \dfrac{N(t)}{1000}\right)$

avec $N(0) = 100$.

2. $N'(t) = 0{,}4N(t)\left(1 - \dfrac{N(t)}{1000}\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{N'(t)}{(N(t))^{22}} = \dfrac{0{,}4}{N(t)}\ 1 - \dfrac{N(t)}{1000}$

$\Leftrightarrow \dfrac{-N'(t)}{(N(t))^2} = -0{,}4\left(\dfrac{1}{N(t)} - \dfrac{1}{1000}\right)$

$\Leftrightarrow P'(t) = -0{,}4P(t) + 0{,}4.10^{-3}$

$P(t) = k\mathrm{e}^{-0{,}4t} + 10^{-3}$ ainsi

$N(t) = \dfrac{1}{k\mathrm{e}^{-0{,}4t} + 10^{-3}}$.

De plus $N(0) = 100 = \dfrac{1}{k + 10^{-3}}$

$\Leftrightarrow k = 10^{-2} - 10^{-3} = 0{,}009$

et $N(t) = \dfrac{1}{0{,}009\mathrm{e}^{-0{,}4t} + 10^{-3}} = \dfrac{1000}{1 + 9\mathrm{e}^{-0{,}4t}}$.

3. $N(t) \geqslant 500 \Leftrightarrow 9\mathrm{e}^{-0{,}4t} + 1 \leqslant 2$

$\Leftrightarrow -0{,}4t \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{9}\right) \Leftrightarrow t \geqslant \dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{9}\right)}{-0{,}4}$

$\Leftrightarrow t \geqslant 5{,}493$

Si t est exprimée en mois, il faudra attendre environ 5 mois et demi pour atteindre les 500 franchises.

TP 3. La radioactivité et les équations différentielles

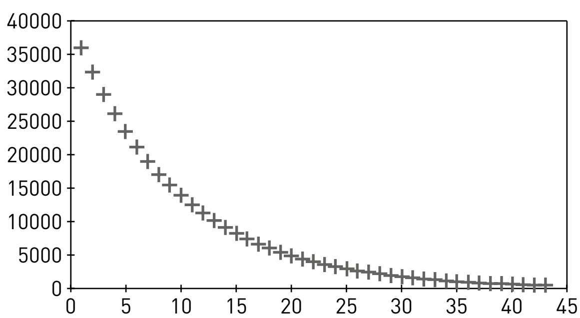
- **Durée estimée :** 55 min
- **Objectif :** Simuler une situation, puis appliquer le modèle mathématique pour analyser le problème et appliquer sur un modèle concret : la datation au carbone 14.

A. Simulation de l'évolution du nombre de noyaux restants

```
from random import *
from pylab import *
def compte_noyaux_restants(n,p):
    N=n
    for i in range(n):
        if random()<=p:
            N=N-1
    return N
def Liste_nb_noyaux_restants(n,p):
    L=[]
    M=n
    while M>0.01*n:
        L.append(M)
        M=compte_noyaux_restants(M,p)
    return L
n=40000
L=Liste_nb_noyaux_restants(n,0.1)
print(L)
m=len(L)
plot(range(m),L,"r+")
show()
```

3. a) La commande **`plot(range(m),L,"r+")`** renvoie les points de coordonnées $(i\ ;\ L[i])$ pour i allant de 0 à m−1.

b) La courbe obtenue avec **n** = 40 000 et **p** = 1/10 représente une fonction de la forme $x \mapsto n\mathrm{e}^{ax}$ avec a négatif.



B. Étude mathématique

On étudie la fonction $t \mapsto N_0 e^{-\lambda t}$.

1. La dérivée est $t \mapsto -\lambda N_0 e^{-\lambda t}$ strictement négative car λ, N_0 et $e^{-\lambda t}$ sont strictement positifs. La fonction est donc strictement décroissante, sa courbe a pour allure celle de la courbe vue en partie **A**.

2. a) Équation de la tangente

$T_0 : y = -\lambda N_0 t + N_0$, elle coupe (Ox) en t tel que

$0 = -\lambda N_0 t + N_0$, soit $t = \dfrac{1}{\lambda}$.

b) Est ce que $N(5\tau) \leqslant (1 - 0{,}99)N_0$?

On a $N(5\tau) = N_0 e^{-\lambda \times \frac{5}{\lambda}} = N_0 e^{-5} \leqslant 0{,}001 N_0$. Affirmation vraie.

3. $N_0 e^{-\lambda\left(t + t_{\frac{1}{2}}\right)} = \dfrac{1}{2} N_0 e^{-\lambda t}$

$\Leftrightarrow N_0 e^{-\lambda\left(t + t_{\frac{1}{2}}\right)} = e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} N_0 e^{-\lambda t}$

$\Leftrightarrow N_0 e^{-\lambda\left(t + t_{\frac{1}{2}}\right)} = N_0 e^{-\lambda t - \ln 2}$

$\Leftrightarrow t_{\frac{1}{2}} = \dfrac{\ln 2}{\lambda} \approx \dfrac{1}{\lambda} \times 0{,}693\ s$

$= \dfrac{1}{\lambda} \times \dfrac{\ln 2}{3\ 600} \quad h = \dfrac{1}{\lambda} \times \dfrac{\ln 2}{24 \times 3600}$ j. On a $5\tau = t_{\frac{1}{2}}$.

C. La méthode de tatation du carbone 14

1. On a $t_{\frac{1}{2}} = \dfrac{\ln 2}{\lambda} = 5570$ ans

d'où $\lambda = \dfrac{\ln 2}{5\ 570}$ année^{-1}.

2. $N_0 e^{-\lambda t} = 0{,}7 N_0$ soit :

$t = -\dfrac{\ln 0{,}7}{\lambda} = -\dfrac{(\ln 0{,}7) \times 5\ 570}{\ln 2} \approx 2866$ ans.

3. $13{,}5\, e^{-\frac{\ln 2}{5570} \times t} = 4{,}8$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{\ln\left(\dfrac{4{,}8}{13{,}5}\right)}{-\dfrac{\ln 2}{5570}} \approx 8\ 310$ années.

4. $e^{-35000} \times \dfrac{\ln 2}{5\ 570} \approx 0{,}0128$ de l'ordre de 1 % donc la teneur n'est plus détectable.