



Correction exercices : Equations différentielles

Exercice 1. Équations homogènes à coefficients constants

1. Déterminer la solution générale de l'équation $y' + 2y = 0$
2. Déterminer la solution unique vérifiant la condition initiale : $y(0) = 2$

Correction

1. $y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -2y$

Donc la forme générale : $y(x) = k e^{-2x}$, $k \in \mathbb{R}$

2. La solution générale de l'équation est : $y = k e^{-2x}$

Or $y(0) = 2 \Rightarrow k e^0 = 2 \Rightarrow k = 2$

Donc $y(x) = 2e^{-2x}$

Exercice 2. Équations avec second membre à coefficients constants

1. Déterminer la solution générale de l'équation $y' + 2y = 3$
2. Déterminer la solution unique vérifiant la condition initiale : $y(0) = -1$

Correction

1. $y' + 2y = 3 \Leftrightarrow y' = -2y + 3$

Alors la fonction constante $x \mapsto \frac{3}{2}$ est une solution particulière de l'équation $y' + 2y = 3$

Donc la forme générale : $y(x) = k e^{-2x} + \frac{3}{2}$, $k \in \mathbb{R}$

2. La solution générale de l'équation est : $y = k e^{-2x} + \frac{3}{2}$

Or $y(0) = -1 \Rightarrow k e^0 + \frac{3}{2} = -1 \Rightarrow k = -\frac{5}{2}$

Donc $y(x) = -\frac{5}{2} e^{-2x} + \frac{3}{2}$

**Exercice 3.** Équations à coefficients constants avec second membre variable

1. Déterminer la solution générale de l'équation $y' - 2y = -4t$
2. Déterminer la solution unique vérifiant la condition initiale : $y(0) = 3$

Correction

1. Les solutions de l'équation différentielle homogène : $y' - 2y = 0$ sont : $y = k \times e^{2t}$, $k \in \mathbb{R}$

Par ailleurs, l'équation a une unique solution particulière polynomiale, de degré 1, $P(t) = At + B$

$$A - 2(At + B) = -4t \Leftrightarrow -2A = -4, A - 2B = 0 \Leftrightarrow A = 2, B = 1$$

donc $P(t) = 2t + 1$

La solution générale de l'équation $y' - 2y = -4t$ est par conséquent : $y = 2t + 1 + k \times e^{2t}$, $k \in \mathbb{R}$.

2. Elle vérifie $y(0) = 1 + k$ donc la condition initiale $y(0) = 3$ équivaut à $k = 2$.

L'unique solution est alors : $y = 2t + 1 + 2 \times e^{2t}$

Exercice 4.

On considère l'équation différentielle (1) : $y' + y = 2e^{-x}$ dans laquelle y désigne une fonction inconnue de la variable réelle x , dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' + y = 0$.
2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2xe^{-x}$. Vérifier que g est solution de l'équation (1).
3. On admet que toute solution h de (1) s'écrit sous la forme $f + g$, où f désigne une solution de l'équation (2) et g est la fonction ci-dessus.
 - (a) Déterminer la forme des solutions de l'équation (1).
 - (b) Déterminer la solution h de l'équation (1) vérifiant la condition initiale $h(0) = -1$.

Correction

1. On reconnaît une équation différentielle du type $y' = ay$ avec $a = -1$,

d'où les solutions cherchées : $f(x) = ke^{-x}$ avec $k \in \mathbb{R}$

2. $g'(x) = 2e^{-x} - 2xe^{-x}$ donc $g'(x) + g(x) = 2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2xe^{-x} = 2e^{-x}$

d'où g est solution de l'équation (1)

3. (a) $h(x) = f(x) + g(x) = ke^{-x} + 2xe^{-x}$ soit $h(x) = (k + 2x)e^{-x}$

$$(b) \quad h(0) = -1 \Leftrightarrow (k + 2 \times 0)e^0 = -1 \Leftrightarrow k = -1.$$

D'où : $h(x) = (2x - 1)e^{-x}$

Exercice 5.

1. Déterminer la solution générale de l'équation $2y' - y = -t^2 + 5t$.



2. Déterminer la solution unique vérifiant la condition initiale : $y(-1) = 5$.

Correction

1. Les solutions de l'équation différentielle homogène : $2y' - y = 0$ sont : $y(t) = k \times e^{\frac{t}{2}}$, $k \in \mathbb{R}$.

Par ailleurs, l'équation a une unique solution particulière polynomiale, de degré 2, $P(t) = At^2 + Bt + C$.

$2(2At + B) - (At^2 + Bt + C) = -t^2 + 5t \Leftrightarrow -A = -1, 4A - B = 5, 2B - C = 0 \Leftrightarrow A = 1, B = -1, C = -2$
donc $P(t) = t^2 - t - 2$. La solution générale de l'équation $2y' - y = -t^2 + 5t$ est par conséquent :
 $y(t) = t^2 - t - 2 + k \times e^{\frac{t}{2}}$, $k \in \mathbb{R}$.

2. Elle vérifie $y(-1) = k \times e^{\frac{-1}{2}}$ donc la condition initiale $y(-1) = 5$ équivaut à $k = 5 \times e^{\frac{1}{2}}$. L'unique solution est alors :

$$y(t) = t^2 - t - 2 + 5 \times e^{\frac{1+t}{2}}.$$