Primitives et Equations différentielles

Un peu d'Histoire...

Après la découverte par Becquerel des rayons uraniques, Marie Curie choisit en 1897 comme sujet de thèse l'étude des propriétés de ces rayons.

Elle découvre, aidée de Pierre, d'autres matières radioactives que l'uranium : le polonium et le radium.

Le nombre d'atomes de radium qui se désintègrent en un temps donné est proportionnel à leur nombre à chaque instant, c'est à dire $\mathrm{N}'(t) = -a\mathrm{N}(t)$, où $\mathrm{N}(t)$ est le nombre d'atomes à l'instant t et a une constante positive.

En physique, on montre expérimentalement que les noyaux radioactifs « meurent sans vieillir ».

C'est Gamov qui le premier, en 1928, a expliqué ce phénomène à l'aide de la toute nouvelle mécanique quantique.

On admet que l'équation différentielle de désintégration du polonium est $y' = -0,0076y$.

L'objectif est alors d'établir l'expression de la fonction N qui dépend du temps t, en année ; puis de déterminer la demi-vie du polonium, c'est à dire le temps au bout duquel il reste la moitié du nombre d'atomes de polonium qu'il y avait initialement.

I Primitives d'une fonction continue

Définition : Primitive

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.

Une **primitive** de f sur I est une fonction F définie et dérivable sur I telle que $\mathrm{F}' = f$.

Exemple : Soit $f : x \mapsto 2x$ définie sur $\mathbb{R}$.

Alors $\mathrm{F}_0 : x \mapsto x^2$ est une primitive de f car $\mathrm{F}_0'(x) = 2x = f(x)$

De même, $\mathrm{F}_1 : x \mapsto x^2 + 1$ est une primitive de f car $\mathrm{F}_0'(x) = 2x = f(x)$

On ne peut donc pas parler de *la* primitive de f, mais d'*une* primitive de f.

Théorème : Existence des primitives (admis)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Théorème : Lien entre les primitives

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.

f admet une infinité de primitives F_k sur I de la forme $\mathrm{F}_k : x \mapsto \mathrm{F}(x) + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Démonstration :

- On montre que les fonctions F_k sont bien des primitives de f sur I :
  Pour tout $x \in \mathrm{I}$ et $k \in \mathbb{R}$, $\mathrm{F}'_k(x) = \mathrm{F}'(x) = f(x)$
  Donc F_k est bien une primitive de f sur I
- On montre ensuite que toute primitive de f sur I est forcément de la forme $x \mapsto \mathrm{F}(x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$) :
  Soit G une primitive de f sur I.
  Ainsi, $\mathrm{G}' = f = \mathrm{F}'$ et donc $\mathrm{G}' - \mathrm{F}' = 0$
  Alors $\mathrm{G} - \mathrm{F}$ est une fonction constante sur I
  Donc, pour tout $x \in \mathrm{I}$, il existe un réel k tel que : $\mathrm{G}(x) - \mathrm{F}(x) = k \Leftrightarrow \mathrm{G}(x) = \mathrm{F}(x) + k$

Exemple : On donne deux fonctions définies sur $]-1;+\infty[$ par $f : x \mapsto \dfrac{3}{(x+1)^2}$ et $\mathrm{F} : x \mapsto \dfrac{2x-1}{x+1}$.

1. Démontrer que F est une primitive de f sur $]-1;\infty[$.
2. Montrer qu'il existe une unique primitive G de f sur $]-1;\infty[$ telle que $\mathrm{G}(0) = 0$.

1. Sur l'intervalle $]-1;+\infty[$, le dénominateur des fonctions f et F ne s'annule pas car $x+1 > 0$. Il n'y a donc pas de problème de définition ou de dérivabilité pour ces fonctions sur l'intervalle considéré.
   Comme $\mathrm{F} = \dfrac{u}{v}$ alors $\mathrm{F}' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = 2x-1$ et $v(x) = x+1$ et $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 1$.
   D'où $\mathrm{F}'(x) = \dfrac{2(x+1) - 1(2x-1)}{(x+1)^2} = \dfrac{3}{(x+1)^2} = f(x)$
   Donc F est une primitive de f sur $]-1;+\infty[$
2. Toutes les primitives de f sont de la forme $\mathrm{G}(x) = \mathrm{F}(x) + k$ où k est une constante réelle. Il faut donc calculer k de manière à avoir $\mathrm{G}(0) = 0$.
   On a $\mathrm{G}(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{F}(0) + k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{-1}{1} + k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = 1$
   Alors $\mathrm{G}(x) = \dfrac{2x-1}{x+1} + 1 = \dfrac{2x-1+x+1}{x+1} = \dfrac{3x}{x+1}$
   Donc il existe une unique primitive de f prenant la valeur 0 en 0 : $\mathrm{G}(x) = \dfrac{3x}{x+1}$
   Les expressions de F et de G diffèrent donc et il n'est pas toujours évident au premier coup d'oeil de voir qu'elles ne diffèrent qu'à une constante près.

II Calculs de primitives

Tableau de primitives

Propriété : Tableau des primitives usuelles

Fonction f définie par	Une primitive F définie par	Domaine de validité
$f(x)=k,\ k\in\mathbb{R}$	$F(x)=kx$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n, n\in\mathbb{N}$	$F(x)=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{1}{x^n}, n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2$	$F(x)=-\dfrac{1}{n-1}\dfrac{1}{x^{n-1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$F(x)=\ln(x)$	$]0;+\infty[$
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
$f(x)=\mathrm{e}^x$	$F(x)=\mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\cos(x)$	$F(x)=\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\sin(x)$	$F(x)=-\cos(x)$	$\mathbb{R}$

Méthode 1 : Déterminer des primitives sur un intervalle donné

1. Commencer par identifier le type de la fonction f ainsi que le type de primitive.
2. Dériver ce type de primitive.
3. Ajuster les coefficients, en fonction du résultat précédent puis écrire les primitives.

Exemple : Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné.

1. $f(x)=x^2$ sur $\mathbb{R}$
2. $g(x)=\dfrac{3}{4}x^3$ sur $\mathbb{R}$
3. $h(x)=\dfrac{6}{x^3}$ sur $]-\infty;0[$
4. $m(x)=\dfrac{1}{2x}$ sur $]0;+\infty[$
5. $n(x)=6\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$
6. $p(x)=\dfrac{1}{2x}$ sur $]0;+\infty[$

1. On a $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$

   Alors f est une fonction de degré 2, continue sur $\mathbb{R}$, une primitive sera donc de degré 3.

   Or $\left(x^3\right)' = 3x^2$.

   On écrit alors $f(x) = \dfrac{1}{3} \times 3x^2$

   et les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont définies par : $\mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + k,\ k \in \mathbb{R}$.

2. On a $g(x) = \dfrac{3}{4}x^3$ sur $\mathbb{R}$

   Alors g est une fonction de degré 3, continue sur $\mathbb{R}$, une primitive sera donc de degré 4.

   Or $\left(x^4\right)' = 4x^3$.

   On écrit alors $g(x) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{4} \times 4x^3$

   et les primitives de g sur $\mathbb{R}$ sont définies par : $\mathrm{G}(x) = \dfrac{3}{16}x^4 + k,\ k \in \mathbb{R}$.

3. On a $h(x) = \dfrac{6}{x^3}$ sur $]-\infty;0[$

   Alors h est du type $\dfrac{1}{x^3}$, continue sur $]-\infty;0[$, une primitive sera donc du type $\dfrac{1}{x^2}$.

   Or, $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)' = -\dfrac{2}{x^3}$.

   On écrit alors $h(x) = 6 \times \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{6}{-2} \times \dfrac{-2}{x^3} = -3 \times \dfrac{-2}{x^3}$

   et les primitives de h sur $]-\infty;0[$ sont définies par : $\mathrm{H}(x) = -\dfrac{3}{x^2} + k,\ k \in \mathbb{R}$.

4. On a $m(x) = \dfrac{1}{2x}$ sur $]0;+\infty[$

   Alors m est du type $\dfrac{1}{x}$, continue sur $]0;+\infty[$, une primitive sera donc du type $\ln(x)$.

   Or, $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$.

   On écrit alors $m(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{x}$

   et les primitives de m sur $]0;+\infty[$ sont définies par : $\mathrm{M}(x) = \dfrac{\ln(x)}{2} + k, k \in \mathbb{R}$.

5. On a $n(x) = 6\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$

   Alors n est de la forme $\sin(x)$, continue sur $\mathbb{R}$, une primitive sera donc du type $\cos(x)$.

   Or, $\cos'(x) = -\sin(x)$.

   Ainsi, les primitives de n sont définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathrm{N}(x) = -6\cos(x) + k, k \in \mathbb{R}$.

6. On a $p(x) = \dfrac{1}{2x}$ sur $]0;+\infty[$

   Alors p est du type $\dfrac{1}{x}$, continue sur $]0;+\infty[$, une primitive sera donc du type $\ln(x)$.

   Or, $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$.

   On écrit alors $p(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{x}$

   et les primitives de p sur $]0;+\infty[$ sont définies par : $\mathrm{P}(x) = \dfrac{\ln(x)}{2} + k, k \in \mathbb{R}$.

Fonctions composées

Propriété : Tableau des primitives sur les fonctions composées

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Une primitive	Domaine de validité
$f = u' + v'$	$\mathrm{F} = u + v$	$x \in \mathrm{I}$
$f = u'u^n, n \in \mathbb{N}$	$\mathrm{F} = \dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$	$x \in \mathrm{I}$
$f = \dfrac{u'}{u^n}, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$	$\mathrm{F} = -\dfrac{1}{n-1}\dfrac{1}{u^{n-1}}$	$x \in \mathrm{I}$ tel que $u(x) \neq 0$
$f = \dfrac{u'}{u}$	$\mathrm{F} = \ln(u)$	$x \in \mathrm{I}$ tel que $u(x) > 0$
$f = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$\mathrm{F} = 2\sqrt{u}$	$x \in \mathrm{I}$ tel que $u(x) > 0$
$f = u'\mathrm{e}^u$	$\mathrm{F} = \mathrm{e}^u$	$x \in \mathrm{I}$

Méthode 2 : Déterminer des primitives de fonctions composées sur un intervalle donné

1. Commencer par identifier le type de f, la fonction u, ainsi que le type de primitive.
2. Dériver ce type de primitive.
3. Ajuster les coefficients, en fonction du résultat précédent puis écrire les primitives.

Exemple :

Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné.

1. $f(x) = (2x-1)^3$ sur $\mathbb{R}$
2. $g(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ sur $]1;+\infty[$
3. $h(x) = \dfrac{1}{(2x-1)^2}$ sur $\mathrm{I} = \left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$
4. $m(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} + x\mathrm{e}^{x^2}$ sur $]-1;+\infty[$
5. $p(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ sur $]1;+\infty[$

1. On a $f(x) = (2x-1)^3$ sur $\mathbb{R}$

   Alors f est du type $u'u^3$ avec $u : x \mapsto 2x-1$ définie sur $\mathbb{R}$, une primitive sera donc du type u^4.

   Or, $\left(u^4\right)'(x) = 4 \times u'(x) \times u^3(x) = 8(2x-1)^3$.

   On écrit alors $f(x) = \dfrac{1}{8} \times 8(2x-1)^3$

   et les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont définies par : $\mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{8}(2x-1)^4 + k, k \in \mathbb{R}$.
2. On a $g(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ sur $]1;+\infty[$

   Alors g est du type $\dfrac{u'}{u}$ avec $u : x \mapsto x^2-1$, $u(x) > 0$ sur $]1;+\infty[$, une primitive sera donc du type

$\ln(u)$.
Or, $(\ln(u))'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{2x}{x^2-1}$.
On écrit alors $g(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x}{x^2-1}$
et les primitives de g sur $]1;+\infty[$ sont définies par : $\mathrm{G}(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2-1)+k, k \in \mathbb{R}$.

3. On a $h(x) = \dfrac{1}{(2x-1)^2}$ sur $\mathrm{I} = \left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$
   Alors h est du type $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u : x \mapsto 2x-1$, $u(x) \neq 0$ sur I, une primitive sera donc du type $\dfrac{1}{u}$.
   Or, $\left(\dfrac{1}{u}\right)'(x) = -\dfrac{u'(x)}{u^2(x)} = -\dfrac{2}{(2x-1)^2}$.
   On écrit alors $h(x) = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{-2}{(2x-1)^2}$
   et les primitives de h sur I sont définies par : $\mathrm{H}(x) = -\dfrac{1}{2(2x-1)}+k, k \in \mathbb{R}$.
4. On a $m(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} + x\mathrm{e}^{x^2}$ sur $]-1;+\infty[$
   Alors m est la somme de deux fonctions, l'une de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u : x \mapsto x+1$, définie et positive sur $]-1;+\infty[$, l'autre de la forme $v'\mathrm{e}^v$ avec $v : x \mapsto x^2$ définie sur $]-1;+\infty[$.
   En effet, on a
   - $\left(\sqrt{u}\right)'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$
   - $\left(e^v\right)'(x) = v'(x)e^{v(x)} = 2xe^{x^2}$.

   Ainsi, les primitives de m sur $]-1;+\infty[$ sont définies par : $\mathrm{M}(x) = 2\sqrt{x+1} + \dfrac{1}{2}e^{x^2} + k, k \in \mathbb{R}$
5. On a $p(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ sur $]1;+\infty[$
   Alors p est du type $\dfrac{u'}{u}$ avec $u : x \mapsto x^2-1$, $u(x) > 0$ sur $]1;+\infty[$, une primitive sera donc du type $\ln(u)$.
   Or, $(\ln(u))'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{2x}{x^2-1}$.
   On écrit alors $p(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x}{x^2-1}$
   et les primitives de p sur $]1;+\infty[$ sont définies par : $\mathrm{P}(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2-1)+k, k \in \mathbb{R}$.

Primitives et conditions initiales

Propriété : Condition d'unicité de la primitive

Soient $x_0 \in \mathrm{I}$ et y_0 deux réels donnés.

Parmi toutes les primitives d'une fonction f définie et continue sur I,

il en existe une seule qui vérifie la condition $\mathrm{F}(x_0) = y_0$.

Démonstration :

1. **Existence :** soit G une primitive de f sur I et considérons $\mathrm{F} : x \mapsto \mathrm{G}(x) - \mathrm{G}(x_0) + y_0$, définie sur I.
   Alors F est aussi une primitive de f sur I et de plus, $\mathrm{F}(x_0) = y_0$.
2. **Unicité :** notons F et G deux primitives de f sur I telles que $\mathrm{F}(x_0) = \mathrm{G}(x_0) = y_0$ et démontrons que $\mathrm{F}(x) = \mathrm{G}(x)$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.
   Comme F et G sont deux primitives de f, il existe un réel k tel que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $\mathrm{F}(x) = \mathrm{G}(x) + k$.
   En particulier, pour $x = x_0$, on obtient $k = 0$ et par conséquent $\mathrm{F} = \mathrm{G}$ sur I.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2e^x - 5x + 1$. Déterminer la primitive de f qui prend la valeur $2e$ en 1.

On a $f(x) = 2e^x - 5x + 1$

Alors f est continue sur $\mathbb{R}$, une primitive sera donc de la forme $\mathrm{F}_k(x) = 2e^x - \frac{5}{2}x^2 + x + k$ avec $k \in \mathrm{R}$

Comme $\mathrm{F}(1) = 2e \quad \Leftrightarrow \quad 2e^1 - \frac{5}{2} \times 1^2 + 1 + k = 2e \quad \Leftrightarrow \quad 2e - \frac{3}{2} + k = 2e \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{3}{2}$

Donc la primitive de f qui prend la valeur $2e$ en 1 est $\mathrm{F}(x) = 2e^x - \frac{5}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$

III Equations différentielles

Définition : Equations différentielles

- Une équation différentielle est une égalité liant une fonction inconnue y de la variable x, ses dérivées successives y', y'', ... et éventuellement d'autres fonctions (constantes, f,....)
- On appelle **solution** d'une équation différentielle **toute fonction** dérivable vérifiant l'égalité.
- Résoudre une équation différentielle, c'est trouver **toutes** les fonctions solutions vérifiant l'égalité.

Exemple : Prouver que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^{-2x} + x^2 + 1$ est solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 2x^2 + 2x + 2$.

On a $f(x) = 3e^{-2x} + x^2 + 1$
Et la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ est $f'(x) = -6e^{-2x} + 2x$
De plus $f'(x) + 2f(x) = -6e^{-2x} + 2x + 2(3e^{-2x} + x^2 + 1) = -6e^{-2x} + 6e^{-2x} + 2x^2 + 2x + 2 = 2x^2 + 2x + 2$
Donc la fonction f est bien une solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 2x^2 + 2x + 2$.

Equation différentielle $y' = ay$ avec a un réels non nul

Théorème : Equation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants

Les équations différentielles de la forme $y' = ay$ où a est un réel non nul ont pour solutions :

les fonctions $x \mapsto \mathrm{K}e^{ax}$, avec K réel.

Démonstration : Soit $a \in \mathbb{R}$

1. **Existence :** Soit $k \in \mathbb{R}$

   Soit f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = ke^{ax}$

   Alors f_k est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_k'(x) = a \times ke^{ax} = a \times f_k(x)$

   Donc f_k est bien une solution de l'équation différentielle $y' = ay$

2. **Unicité de la forme :** Démontrons que les fonctions f_k sont les seules solutions de l'équation différentielle $y' = ay$.

   Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et solution de l'équation différentielle $y' = ay$, d'où $g'(x) = ag(x)$

   Soit la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(x) = \dfrac{g(x)}{e^{ax}}$.

   La fonction Φ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$\begin{aligned}\Phi'(x) &= \frac{g'(x)e^{ax} - ae^{ax}g(x)}{(e^{ax})^2} \\ &= \frac{ag(x)e^{ax} - ag(x)e^{ax}}{(e^{ax})^2} \quad \text{car } g'(x) = ag(x) \\ &= 0\end{aligned}$$

   Ainsi la fonction Φ est constante sur $\mathbb{R}$.

   C'est à dire, qu'il existe $k \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(x) = k = \dfrac{g(x)}{e^{ax}}$

   D'où $g(x) = ke^{ax}$

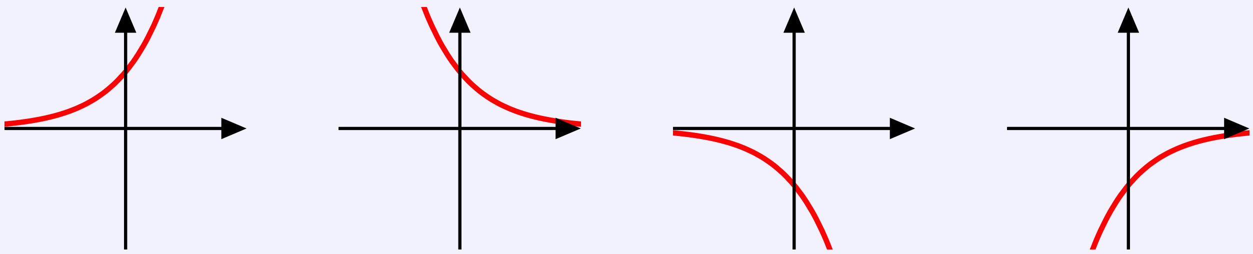
   Donc toutes les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont de la forme $f_k(x) = ke^{ax}$.

Remarque : Pour x_0 et y_0 deux réels donnés, il existe une unique fonction f solution de l'équation différentielle $y' = ay$ prenant la valeur y_0 en x_0, c'est-à-dire vérifiant la « condition initiale » $f(x_0) = y_0$.

Allure des courbes des fonctions $x \mapsto \mathrm{K}e^{ax}$ avec $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$

Exemples de l'allure des courbes des fonctions $x \mapsto \mathrm{K}e^{ax}$ en fonction du signe K et de a

avec $\mathrm{K} > 0$ et $a > 0$ — avec $\mathrm{K} > 0$ et $a < 0$ — avec $\mathrm{K} < 0$ et $a > 0$ — avec $\mathrm{K} < 0$ et $a < 0$



Exemple : On considère l'équation différentielle $3y' + 5y = 0$.

1. Déterminer la solution générale de cette équation.
2. Déterminer l'unique solution telle que $y(1) = 2$.

> 1. On a l'équation différentielle $3y' + 5y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' = \dfrac{-5}{3}$
>
>   Donc l'ensemble des solutions sont les fonctions $x \mapsto \mathrm{K}e^{\frac{-5}{3}x}$ avec $k \in \mathbb{R}$
>
> 2. On cherche la fonction tel que $f(1) = 2$
>
>   Alors $f(1) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{K}e^{\frac{-5}{3}\times 1} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{K} = \dfrac{2}{e^{\frac{-5}{3}}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{K} = 2e^{\frac{5}{3}}$
>
>   D'où $f(x) = 2e^{\frac{5}{3}} \times e^{\frac{-5}{3}x} = 2e^{\frac{5}{3}(1-x)}$
>
>   Donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ cherchée est } f(x) = 2e^{\frac{5}{3}(1-x)}}$

Equation différentielle $y' = ay + b$ avec a un réel non nul et b un réel

Théorème : Equation différentielle $y' = ay + b$ avec a un réel non nul et b un réel

Les équations différentielles de la forme $y' = ay + b$ où a est un réel non nul et b un réel ont pour solutions les fonctions $x \mapsto \mathrm{K}e^{ax} - \dfrac{b}{a}$, avec $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$.

Démonstration : dans le manuel page 210

Remarque 1 : La fonction constante $x \mapsto -\dfrac{b}{a}$ est une solution particulière de l'équation $y' = ay + b$.

Vérification : On pose $f(x) = -\dfrac{b}{a}$ alors $f'(x) = 0$

Alors $ay + b = a \times \dfrac{-b}{a} + b = -b + b = 0$

Donc la fonction f vérifie bien l'équation différentielle $y' = ay + b$.

Remarque 2 : Pour x_0 et y_0 deux réels donnés, il existe une unique fonction f solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ prenant la valeur y_0 en x_0, c'est-à-dire vérifiant la « condition initiale » $f(x_0) = y_0$.

Exemple : On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 5y + 2$.

1. Déterminer la solution particulière constante de cette équation (E).
2. Déterminer la forme générale des solutions de l'équation (E).
3. Déterminer la solution g de (E) tel que $g(0) = 1$.
4. Déterminer la solution h de (E) tel que la courbe représentative C_h dans un repère orthonormé admet une tangente au point d'abscisse 0 de coefficient directeur 2.

1. On a l'équation différentielle $y' = 5y + 2$
   Alors la fonction constante $x \mapsto -\dfrac{2}{5}$ est une solution particulière de l'équation $y' = 5y + 2$
2. On en déduit la forme générale des solutions de l'équation : $x \mapsto \mathrm{K}e^{5x} - \dfrac{2}{5}$ avec $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$
3. On cherche la fonction g tel que $g(0) = 1$
   Alors $g(0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{K}e^{5\times 0} - \dfrac{2}{5} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{K} = 1 + \dfrac{2}{5} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{K} = \dfrac{7}{5}$
   Donc $\boxed{\text{la fonction } g \text{ cherchée est } g(x) = \dfrac{7}{5}e^{5x} - \dfrac{2}{5}}$
4. On cherche la fonction h tel que $h'(0) = 2$
   On a $h(x) = \mathrm{K}e^{5x} - \dfrac{2}{5}$ et $h'(x) = 5\mathrm{K}e^{5x}$
   Alors $h'(0) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 5\mathrm{K}e^{5\times 0} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 5\mathrm{K} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{K} = \dfrac{2}{5}$
   Donc $\boxed{\text{la fonction } h \text{ cherchée est } h(x) = \dfrac{2}{5}e^{5x} + \dfrac{2}{5}}$

Equation différentielle $y' = ay + \phi$ avec ϕ une fonction

Théorème : Equation différentielle $y' = ay + \phi$

Soit a un réel et P une fonction définie sur un intervalle I.

Etant donnée une solution particulière P de l'équation différentielle $y' = ay + \phi$, les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $x \mapsto \mathrm{K}e^{ax} + \mathrm{P}(x)$, avec $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$.

Méthode :

- Trouver ou vérifier qu'une fonction P est solution de l'équation différentielle $y' = ay + \phi$
- Appliquer la propriété suivante : f est solution de $y' = ay + \phi \quad \Leftrightarrow \quad f - \mathrm{P}$ est une solution de $y' = ay$

Exemple : On considère l'équation différentielle $2y' + 3y = 6x + 1$.

1. Démontrer que la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{P}(x) = 2x - 1$ est solution de l'équation.
2. Montrer que f est solution de $2y' + 3y = 6x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad f - \mathrm{P}$ est une solution de $2y' + 3y = 0$
3. En déduire la forme générale de toutes les solutions de l'équation.

1. Vérifions que P définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{P}(x) = 2x - 1$ est solution de l'équation $2y' + 3y = 6x + 1$

   On a $\mathrm{P}(x) = 2x - 1$

   Alors la fonction P est dérivable et $\mathrm{P}'(x) = 2$

   D'où $2\mathrm{P}'(x) + 3\mathrm{P}(x) = 2 \times 2 + 3 \times (2x - 1) = 4 + 6x - 3 = 6x + 1$

   Donc $\boxed{\text{P est une solution de l'équation } 2y' + 3y = 6x + 1}$

2. On a f est solution de $2y' + 3y = 6x + 1$
$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 2f' + 3f = 6x + 1 \\ &\Leftrightarrow 2f' + 3f = 2\mathrm{P}' + 3\mathrm{P} \\ &\Leftrightarrow 2f' - 2\mathrm{P}' + 3f - 3\mathrm{P} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(f' - \mathrm{P}') + 3(f - \mathrm{P}) = 0 \\ &\Leftrightarrow f - \mathrm{P} \text{ est une solution de } 2y' + 3y = 0 \end{aligned}$$

3. On a f est solution de $2y' + 3y = 6x + 1$
$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow f - \mathrm{P} \text{ est une solution de } 2y' + 3y = 0 \\ &\Leftrightarrow f - \mathrm{P} \text{ est une solution de } y' = -\frac{3}{2}y \\ &\Leftrightarrow f - \mathrm{P} \text{ est de la forme } x \mapsto \mathrm{K}e^{-\frac{3}{2}x} \text{ où K est un réel} \\ &\Leftrightarrow f : x \mapsto \mathrm{K}e^{-\frac{3}{2}x} + \mathrm{P}(x) \text{ où K est un réel} \end{aligned}$$

   On en déduit la forme générale des solutions de l'équation : $\boxed{x \mapsto \mathrm{K}e^{-\frac{3}{2}x} + 2x - 1 \text{ avec } \mathrm{K} \in \mathbb{R}}$