

CHAPITRE 6 Fonction logarithme népérien

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

Dans ce chapitre nous étudierons une nouvelle fonction introduite pour la première fois pour les élèves au programme de Terminale, la fonction logarithme népérien.

Dans un premier temps, il s'agit d'aborder une approche en se reposant sur les acquis des élèves de 1^{ère}, à savoir l'utilisation de la fonction exponentielle et le fait que cette nouvelle fonction soit la fonction réciproque de celle qu'ils ont découvert en classe de 1^{ère}. Ainsi les élèves s'appuieront sur les images mentales des courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme.

Puis, dans un deuxième temps, il s'agira d'exploiter les propriétés algébriques de cette nouvelle fonction.

Enfin dans un dernier temps, nous étudierons cette fonction et des composées de cette fonction, tant d'un point de vue variations que limites.

Objectifs

- Résoudre des équations, inéquations avec $\ln$ ou $\exp$.
- Résoudre des équations, inéquations du type $\ln u \leq \ln v$.
- Utiliser les propriétés algébriques de $\ln$.
- Résoudre des inéquations du type $q^n < a$.
- Déterminer des tangentes, la position relative de courbes.
- Étudier des fonctions avec $\ln$.
- Déterminer des limites, notamment dans le cas de formes indéterminées.
- Dériver et étudier des fonctions avec $\ln u$.

II. Corrigés

Pour prendre un bon départ p. 169

1. Utiliser les propriétés algébriques de la fonction exponentielle

a) e^{-2x}

b) e^{3x}

c) e^{5x-1}

d) $\frac{e^{-x}}{e^{-x}} - \frac{ex}{e^{-x}} = 1 - e^{2x}$

2. Résoudre des équations du type $e^x = k$

1. Une seule solution pour $k \in \mathbb{R}_+^*$; et aucune solution pour $k \in \mathbb{R}_-^*$.

2. a) $S = \emptyset$

b) $S = \{0\}$

c) $S = \{1\}$

d) $S = \{-1\}$

3. Résoudre des équations et des inéquations simples avec la fonction exponentielle

1. a) $e^{4x+1} = e^0$; $S = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$

b) $e^4 = e$; $S = \{\emptyset\}$

c) $S = \{\emptyset\}$

2. a) $e^{-x} \leq e^1$; $S = [-1 ; +\infty[$

b) $x + 1 > 3 - 2x \Leftrightarrow 3x > 2$

donc $S = \left]\frac{2}{3} ; +\infty\right[$.

c) $e^{-2x} < e^{x-3} \Leftrightarrow -2x < x - 3$

Soit $S =]1 ; +\infty[$.

4. Calculer des fonctions dérivées

a) $f'(x) = -5e^{-5x+3}$

b) $f'(x) = 3e^x + 3xe^x = 3(1+x)e^x$

c) $f'(x) = 5 \times \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2}$

5. Savoir déterminer une équation de tangente

a) $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ avec $f'(x) = e^x + (x - 1)e^x = xe^x$
d'où $y = e(x - 1) - 3$ soit $y = ex - e - 3$.

b) $y = f'(0)x + f(0)$ avec $f'(x) = 5e^x + 2$ d'où $y = 7x$.

6. Déterminer des limites

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x - 1 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ d'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3x-1} = 0$.

b) $\frac{e^x}{x-2} = \frac{e^x}{x} \times \frac{x}{x-2}$ or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ par crois-

sance comparée et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{2}{x}} = 1$

donc par produit de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x-2} = +\infty$.

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1)e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{2x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ avec $f(x) = e^x$ d'où

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = f'(0) = e^0 = 1$.

7. Déterminer des réels vérifiant des conditions

a) $x \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[\cap] -\infty; \frac{5}{3} \left[\right.$ donc $x \in \left] \frac{1}{2}; \frac{5}{3} \left[\right.$

b) $x \in] -\infty; 1 \left[\cap] -4; 1 \left[\right.$ donc $x \in] -4; 1 \left[\right.$

A. Transformation du plan

1. A et B sont symétriques par rapport à la droite Δ .

2. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} y-x \\ x-y \end{pmatrix}$ et soit $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur direc-

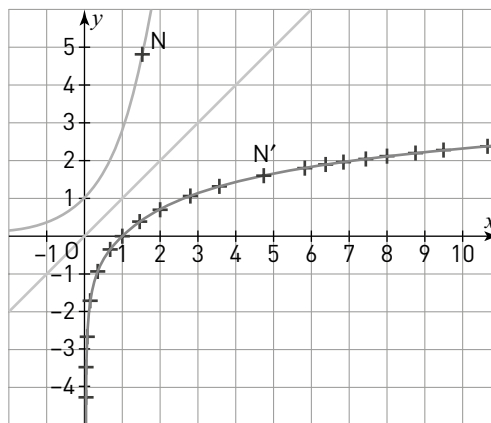
teur de Δ ; $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0$; les droites (AB) et Δ sont donc perpendiculaires. Soit I le milieu de [AB] ;

$I \left(\frac{x+y}{2}; \frac{y+x}{2} \right)$.

On remarque que I appartient à Δ ; par conséquent Δ est la médiatrice de [AB] ce qui signifie que A et B sont effectivement symétriques par rapport à Δ .

B. Construction de la courbe de la fonction logarithme népérien

1. 2. et 3.



C. Conséquences et conjectures

1. $e^{\ln(1)} = 1$ or $e^0 = 1$ donc $\ln(1) = 0$; $e^{\ln(e)} = e$ or $e^1 = e$ donc $\ln(e) = 1$.

2. Puisque $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto e^x$ sont des fonctions réciproques, on en déduit que $e^{\ln(x)} = x$ et $\ln(e^x) = x$.

3. $]0; +\infty[$ est l'ensemble de définition de la fonction logarithme népérien qui correspond à l'intervalle image de la fonction exponentielle.

4. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

b) La fonction $\ln$ semble strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) La fonction $\ln$ semble strictement négative sur $]0; 1[$, strictement positive sur $]1; +\infty[$ et s'annule en 1.

Activités

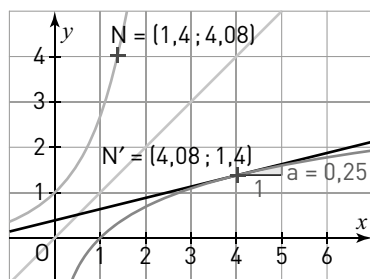
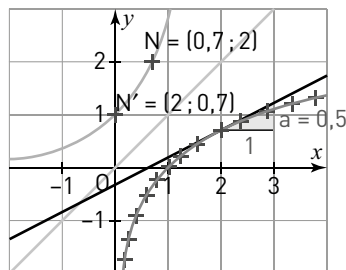
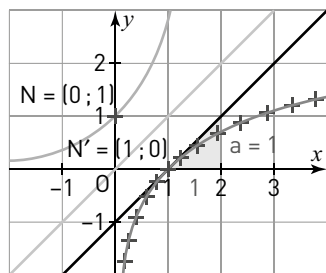
p. 170

1 Approcher graphiquement une nouvelle fonction

• **Durée estimée** : 35 min

• **Objectif** : Permettre l'obtention pas à pas de la courbe représentative de la fonction $\ln$.

5. a)



b) Soit a l'abscisse du point N' , et m le coefficient directeur de la tangente à la courbe en N' , le lien qui semble exister entre a et m semble être : $n = \frac{1}{a}$.

6. Conjecture : $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

2 Répondre à des besoins pratiques de calculs au XVI^e siècle : les logarithmes

- **Durée estimée :** 35 min
- **Objectifs :** Introduire la fonction $\ln$ d'un point de vue historique, permettant de répondre à un problème de l'époque : faciliter les calculs dans les domaines tels que l'astronomie, la navigation...

1. a) $m \times n = 6$ et $x + y = 0,6931 + 1,0986 = 1,7917 \approx 1,792$ arrondi au millièmè près : le principe est vérifié.

b) $2 \times 4 = 8$ et $x + y = 0,6931 + 1,3863 = 2,0794$.

c) $1 \times 1 = 1$ et $x + x = 2x$ or on doit avoir $2x = x$ donc $x = 0$ d'où : le nombre à écrire en face de 1 doit être 0.

d) Il faut ajouter les nombres en face de 27 et 91 soit $3,2958 + 4,5109 = 7,8067$ et le nombre en face de 7,8067 est 2 457 donc $27 \times 91 = 2\,457$.

2. a) En faisant $x - y = 2,3026 - 1,6094 = 0,6932$ au millièmè près on remarque qu'il s'agit du nombre écrit en face de 2. Il semblerait donc qu'à $m \div n$ il faille associer $x - y$.

Test avec $9 \div 3 = 3$ et $x - y = 2,1972 - 1,0986 = 1,0986$; la conjecture se confirme.

Test avec $6 \div 3 = 2$ et $x - y = 1,7918 - 1,0986 = 0,6932$ qui au millièmè près correspond au nombre écrit en face de 2 ; la conjecture se confirme de nouveau.

b) $2 \div 10 = 0,2$ et $x - y = 0,6931 - 2,3026 = -1,6095$ au millièmè près : le nombre à écrire devant 0,2 serait -1,609.

$3 \div 2 = 1,5$ et $x - y = 1,0986 - 0,6931 = 0,4055$; le nombre à écrire en face de 1,5 serait 0,4055.

3. a) $2,1972 - 1,0986 = 1,0986$

$$3,2958 - 2,1972 = 1,0986$$

$$4,3944 - 3,2958 = 1,0986$$

La suite de la colonne de droite pour les nombres respectivement associés semble être arithmétique de raison 1,0986.

b) $3^{-1} \times 3 = 1$ donc on obtient le nombre à écrire en face de 3^{-1} en effectuant le calcul $0 - 1,0986 = -1,0986$

$81 = 3^4$ or $3^{10} = 3^4 \times 3^6$ par conséquent on obtient le nombre à écrire en face de 3^{10} en effectuant le calcul $4,3944 + 6 \times 1,0986 = 10,986$.

4. a) $m \times n = a \times a = a^2$ et $x + x = 2x$ on peut donc énoncer $\ln(a^2) = 2\ln(a)$.

$\ln(3^2) = \ln(9) = 2,1972$ et on vérifie $2\ln(3) = 2 \times 1,0986 = 2,1972$.

b) $m \times n = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$ et $\ln((\sqrt{a})^2) = 2\ln(\sqrt{a})$ soit $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

$\ln(\sqrt{16}) = \ln(4) = 1,3863$ et $\frac{1}{2}\ln(16) = \frac{1}{2} \times 2,7726 = 1,3863$

À vous de jouer

p. 173

1. a) $\ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$

b) $e^{2x} = -1$; $S = \{\emptyset\}$

c) Conditions d'existence :

il faut que $4 - 2x > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; 2[$,

$$\ln(4 - 2x) > 1 \Leftrightarrow 4 - 2x > e^1, \text{ et}$$

$$x \in I \Leftrightarrow x \in \left] -\infty; 2 - \frac{e}{2} \right[.$$

$$\begin{aligned} \text{d)} e^{x+1} \geq 2 &\Leftrightarrow x + 1 \geq \ln 2 \\ &\Leftrightarrow x \in [\ln 2 - 1; +\infty[\end{aligned}$$

2. a) Conditions d'existence : $5x - 1 > 0$.

$$\text{Soit } x \in I = \left] \frac{1}{5}; +\infty \right[; \ln(5x - 1) = 2 \Leftrightarrow \ln(5x - 1)$$

$$= \ln(e^2) \Leftrightarrow 5x - 1 = e^2 \text{ et } x \in I.$$

$$S = \left\{ \frac{e^2 + 1}{5} \right\}$$

$$\text{b)} e^{-x} = 5 \Leftrightarrow -x = \ln 5 \text{ d'où } S = \{-\ln 5\}.$$

c) Conditions d'existence : $3x - 1 > 0$ soit

$$x \in I = \left] \frac{1}{3}; +\infty \right[\text{ et } \ln(3x - 1) < \ln 1 \Leftrightarrow 3x - 1 < 1$$

$$\text{avec } x \in I; S = \left] \frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right[.$$

$$\text{d)} e^{5-x} \leq 2 \Leftrightarrow e^{5-x} \leq e^{\ln 2} \Leftrightarrow 5 - x \leq \ln 2 \text{ soit } S = [5 - \ln 2; +\infty[.$$

3. a) Conditions d'existence : $x \in]-1; +\infty[$ et

$$x \in]-\infty; 0[\text{ d'où } x \in I =]-1; 0[.$$

$$\ln(x + 1) = \ln(-x) \Leftrightarrow x + 1 = -x$$

$$\text{et } x \in I \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

b) Conditions d'existence : $x^2 - 1 > 0$ soit

$$x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[.$$

$$\ln(x^2 - 1) \leq \ln 5 \Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 5 \text{ et } x \in I \text{ donc}$$

$$S = \left[-\sqrt{6}; -1[\cup]1; \sqrt{6} \right].$$

4. a) Conditions d'existence : $x^2 - x + 1 > 0$ or $\Delta < 0$ donc le polynôme est toujours du signe de a , ici 1 donc le polynôme est toujours strictement positif, donc $x \in \mathbb{R}$.

$$\ln(x^2 - x + 1) = \ln 2 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = 5; S = \left\{ \frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$$

b) Conditions d'existence : $2x > 0$ soit $x > 0$ et $x^2 - 2x + 1 > 0$ or $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ s'annule en 1 et strictement positif sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\text{Donc } x \in I =]0; 1[\cup]1; +\infty[.$$

Il s'agit alors de résoudre :

$$2x > x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 < 0$$

$$\Delta = 12; x_1 = 2 - \sqrt{3} \text{ et } x_2 = 2 + \sqrt{3}$$

$$x \in]2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}[\cup I \text{ soit :}$$

$$x \in]2 - \sqrt{3}; 1[\cup]1; 2 + \sqrt{3}[.$$

$$\text{5. a)} 2\ln 5 + \frac{1}{2}\ln(125) = 2\ln 5 + \frac{3}{2}\ln 5 = \frac{7}{2}\ln 5$$

$$\text{b)} 3\ln 5 + 2\ln 7$$

$$\text{c)} 4 - 2\ln 5$$

$$\text{d)} -\frac{4}{5} - \ln 5$$

$$\begin{aligned} \text{6. a)} 4\ln 12 - 4\ln 36 &= 4\ln(2^2 \times 3) - 4\ln(2^2 \times 3^2) \\ &= 8\ln 2 + 4\ln 3 - 8\ln 2 - 8\ln 3 = -4\ln 3 \end{aligned}$$

$$\text{b)} \ln\left(\frac{1}{9}\right) + \ln 81 = -\ln 3^2 + \ln 3^4 = -2\ln 3 + 4\ln 3 = 2\ln 3$$

$$\text{c)} \ln \frac{\sqrt{3}}{3} - \ln 27 = \frac{1}{2}\ln 3 - \ln 3 - 3\ln 3 = -\frac{7}{2}\ln 3$$

$$\begin{aligned} \text{d)} e^{-2\ln 2} + \ln(9e^2) &= e^{\ln(2^{-2})} + \ln 9 + \ln(e^2) \\ &= 2^{-2} + 2\ln 3 + 2 = \frac{9}{4} + 2\ln 3 \end{aligned}$$

$$\text{7. a)} n \ln\left(\frac{5}{9}\right) \leq \ln(0,01) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{5}{9}\right)}$$

$$\text{soit : } n \geq 8.$$

$$\text{b)} } 2^{n-1}(2-7) > -3 \Leftrightarrow 2^{n-1} < \frac{3}{5} \Leftrightarrow n < \frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{\ln(2)} + 1$$

$$\text{soit : } n = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{8. a)} 3^{2n} > 10^8 &\Leftrightarrow \ln(3^{2n}) > \ln(10^8) \Leftrightarrow 2n\ln 3 > \ln(10^8) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{\ln(10^8)}{2\ln 3} \end{aligned}$$

$$\text{soit : } n \geq 9.$$

$$\text{b)} } 5^n \times 9^{-n-1} \leq 10^{-4} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{9}\right)^n \times \frac{1}{9} \leq 10^{-4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{9}\right)^n \leq 9 \times 10^{-4} \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{5}{9}\right) \leq \ln(9 \times 10^{-4})$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(9 \times 10^{-4})}{\ln\left(\frac{5}{9}\right)}$$

soit : $n \geq 12$.

9. $T_e : y = f'(e)(x - e) + f(e)$ soit $y = \frac{1}{e}x$.

10. $T_e : y = f'(e)(x - e) + f(e)$ or $f'(x) = \frac{1}{x}$ d'où

$$T_e : y = \frac{1}{e}(x - e) \text{ soit } y = \frac{1}{e}x - 1.$$

$$f(x) - \left(\frac{1}{e}x - 1\right) = \ln x - 1 - \frac{1}{e}x + 1 = \ln x - \frac{1}{e}x$$

Il faudrait étudier le signe de $\ln x - \frac{1}{e}x$.

On pose $h(x) = \ln x - \frac{1}{e}x$.

$$h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} \text{ et } h'(x) > 0 \Leftrightarrow]0; e[.$$

x	0	e	$+\infty$
Signe de $h'(x)$		+	-
Sens de variation de h			

D'après le tableau de variations, on remarque que la fonction h admet un maximum nul, la fonction est donc toujours négative, d'où $\ln x \leq \frac{1}{e}x$ ce qui signifie que la courbe est en-dessous de sa tangente T_e .

11. $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{-1-x}{x^2}$, sur $]0; +\infty[$; $-1-x < 0$ et $x^2 > 0$ donc $f'(x) < 0$ d'où f est décroissante sur $]0; +\infty[$.

12. $f'(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - x - 1}{x}$

sur $]0; +\infty[$ le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $2x^2 - x - 1$; $\Delta = 9$ et $x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = 1$.

x	0	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Sens de variation de f			

13. $x^2 \ln x - x^2 = x^2(\ln x - 1)$ or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - 1 = +\infty$ donc par produit des limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln x - x^2 = +\infty$.

14. $\frac{(x-1)\ln(x-1)}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{(x-1)\ln(x-1)}{\left(\frac{x-1}{x}\right)^2} = \frac{x^2 \ln(x-1)}{x-1}$

or $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln X}{X} = -\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{x-1} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$

donc par produit des limites $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\ln(x-1)}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} = -\infty$

15. $f'(x) = \frac{1 \times x^2 - (1+x) \times 2x}{x^4} = \frac{-x^2 - 2x}{x^2(1+x)}$

16. $f'(x) = 2x \ln\left(\frac{1}{2x}\right) + (x^2 - 4) \frac{-\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{2x}}$
 $= 2x \ln\left(\frac{1}{2x}\right) - \frac{x^2 - 4}{x} = 2x \ln\left(\frac{1}{2x}\right) - x + \frac{4}{x}$

$$\begin{aligned}
 17.1. f'(x) &= \frac{1}{x^2}(\ln(x) - 2) + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x} \\
 &= \frac{\ln(x) - 2}{x^2} + \frac{x - 1}{x^2} = \frac{\ln(x) - 2 + x - 1}{x^2} \\
 &= \frac{\ln(x) + x - 3}{x^2} = \frac{u(x)}{x^2}
 \end{aligned}$$

$$2. u'(x) = \frac{1}{x} + 1 = \frac{1+x}{x} \text{ pour } x \in [e; +\infty[, u'(x) > 0$$

par conséquent u est croissante sur $[e; +\infty[$, or $u(e) = e - 2 > 0$ donc u est positive sur $[e; +\infty[$.

3. f' est donc positive sur $[e; +\infty[$ donc f est croissante sur $[e; +\infty[$.

$$18.1. f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

Puisque $x^2 > 0$ sur $\mathcal{D}_f$, le signe de $f'(x)$ est le même que celui de g .

$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0 \text{ sur } [1; +\infty[.$$

x	1	$+\infty$
Signe de $g'(x)$		+
Sens de variation de g		
Signe de $g(x)$ = signe de $f'(x)$		+
Sens de variation de f		

$$2. f(x) - x = x - \frac{\ln x}{x} - x = -\frac{\ln x}{x}$$

Or sur $]1; +\infty[, x > 0$ et $\ln x > 0$ donc $f(x) - x < 0$ par conséquent la courbe $\mathcal{C}_f$ est toujours en dessous de la droite $\mathcal{D}$.

$$19. f'(x) = \frac{-4x}{-2x^2 + 13,5}$$

x	-2,5	0	2,5
$-4x$	+	0	-
$-2x^2 + 13,5$		+	
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Sens de variation de f			

$$\begin{aligned}
 20.1. g'(x) &= \frac{e-1}{1+(e-1)x} - 1 = \frac{e-1-1-(e-1)x}{1+(e-1)x} \\
 &= \frac{(e-2)-(e-1)x}{1+(e-1)x}
 \end{aligned}$$

2. Sur $[0; 1]$, $1 + (e-1)x > 0$ le signe de $g'(x)$ ne dépend que du signe de $(e-2) - (e-1)x$.

$$\text{Or } (e-2) - (e-1)x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{e-2}{e-1}.$$

x	0	$\frac{e-2}{e-1}$	1
Signe de $g'(x)$	+	0	-
Sens de variation de g			

g admet donc un maximum en $\frac{e-2}{e-1}$ dont une valeur arrondie est 0,12.

3. Sur l'intervalle $\left[0; \frac{e-2}{e-1}\right]$, la fonction g est strictement croissante et continue, de plus $g(0) < 0,05$ et $g\left(\frac{e-2}{e-1}\right) > 0,05$; donc d'après le

théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0,05$ admet une unique solution sur l'intervalle $\left[0; \frac{e-2}{e-1}\right]$ de même on démontre que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $\left[\frac{e-2}{e-1}; 1\right]$; par conséquent l'équation admet bien deux solutions sur $[0; 1]$.

Exercices

apprendre à démontrer

p. 182

Pour s'entraîner

1. $P(n) : \{\ln(a^n) = n \ln(a)\}$

Initialisation : pour $n = 0$; $\ln(a^0) = \ln 1 = 0$ et

$0 \times \ln a = 0$, $P(0)$ est vraie.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier naturel k tel que $P(k)$ soit vraie et montrons que $P(k+1)$ est encore vraie.

$\ln(a^{k+1}) = \ln(a^k \times a) = \ln(a^k) + \ln(a) = k \ln(a) + \ln(a)$ d'après $P(k)$.

On a donc $\ln(a^{k+1}) = (k+1) \ln a$.

$P(k+1)$ est donc vraie.

Conclusion : en vertu du principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

2. Posons $v(x) = \ln(x)$

or $(v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$

d'où $(\ln(x))' = \frac{1}{u(x)} \times u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Exercices

calculs et automatismes

p. 183

21. Équations, inéquations (1)

1. d)

$$\ln \sqrt{2} + \ln 8 - 5 \ln 4 = \frac{1}{2} \ln 2 + 3 \ln 2 - 10 \ln 2 = -\frac{13}{2} \ln 2$$

2. c)

$$f(x) = \ln((6x+2)(6x-2)) - \ln 4$$

$$= \ln\left(\frac{36x^2 - 4}{4}\right) = \ln(9x^2 - 1)$$

3. c)

Condition d'existence : $x \in]1; +\infty[$. Cela revient

à résoudre sur cet intervalle $4x = x - 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$;

mais $-\frac{1}{3} \notin]1; +\infty[$ donc il n'y a pas de solution.

4. b)

Condition d'existence : $]-\infty; 0[$. Cela revient à résoudre sur cet intervalle $\ln(-x) \leq \ln(e)$

$\Leftrightarrow x \in [-e; +\infty[\cup]-\infty; 0[$ donc $x \in [-e; 0[$.

22. Dérivées

$$1. f'(x) = \frac{3}{x} - 2x$$

$$2. g'(x) = -\frac{2}{4-2x} = \frac{1}{x-2}$$

23. Python

1. La valeur envoyée par la fonction Python représente l'image de x obtenue par la fonction f définie par $f(x) = \ln(4-2x)$ pour tout $x > 2$.

2.

```
def solution_inequa(x):
    if x <= 0:
        return "ce nombre n'est pas solution de l'inéquation"
    else:
        if log(x)+x-1 < 0:
            return "ce nombre est solution de l'inéquation"
        else:
            return "ce nombre n'est pas solution de l'inéquation"
```

24. Fonction ln

a) Faux contre-exemple : $x = 0,5$ et

$$\ln(0,5^2) = \ln(0,25) < 0.$$

b) Faux c'est $\ln(10 \times 2) = \ln(10) + \ln(2)$.

c) Vrai car $f'(x) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$; puisque $x \in]-\infty; 0[$;

$\frac{1}{x} < 0$ d'où $f'(x) < 0$ donc f est décroissante sur

$]-\infty; 0[$.

d) Faux $u_0 = 0$; $u_1 = \ln(3)$ et $u_2 = 2 \ln(3)$ puisque le 1^{er} terme est nul. Suite arithmétique de raison $\ln(3)$:
 $u_{n+1} - u_n = \ln(3^{n+1}) - \ln(3^n) = (n+1) \ln(3) - n \ln(3) = \ln(3)$.

25. Limites (1)

a) Faux car $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ par croissance compa-

rée et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x} = -\infty$ donc par somme des limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x - \frac{3}{x} = -\infty.$$

b) Vrai par croissance comparée.

c) Vrai car $x \ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} x \ln x$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ par croissance comparée.

d) Faux car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{x+1}{x}$
 or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée et
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$; donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$.

26. Lectures graphiques

a) Faux c'est $f(4) \approx 3$.

b) Faux car une seule tangente horizontale en -5 environ.

c) Vrai, la fonction est croissante pour $x > -\frac{1}{2}$.

d) Vrai la fonction semble concave donc $f''(x) < 0$.

27. Équations, inéquations (2)

1. Il faut d'abord rechercher les conditions d'existence, à savoir pour quelles valeurs de x , $2x+1 > 0$ et $4-x > 0$ et $2x > 0$.

2. Il faudra étudier le signe de $f(x) - g(x)$.

28. Limites (2)

1. b) car $x^2 \ln x - 3x + 5 = x(x \ln x - 3) + 5$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x \ln x - 3) = +\infty$ par produit des limites.

2. b) car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^3} = +\infty$ par croissance comparée,

d'où $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-2)}{(x-2)^3} = -\infty$.

Exercices d'application

p. 184-185

Équations/inéquations avec ln ou exp

29. 1) a) Condition d'existence : $x \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$;

$2x-1=1 \Leftrightarrow x=1 \in I$.

b) Condition d'existence : $x \in I =]e; +\infty[$;

$x-e=e \Leftrightarrow x=2e \in I$.

c) $\ln x = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2}$

d) $5-2x = \ln 2 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} - \frac{\ln 2}{2}$

2) a) Condition d'existence : $x \in I =]-\infty; 1[$;
 $1-x > 1$ et $x \in I \Leftrightarrow x < 0$ et $x \in I \Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[$.

b) Condition d'existence : $x \in I = \left] -\infty; \frac{3}{2} \right[$; $3-2x \leq e$

et $x \in I \Leftrightarrow x \in \left[\frac{3-e}{2}; +\infty \right[$ et $x \in I \Leftrightarrow x \in \left[\frac{3-e}{2}; \frac{3}{2} \right[$.

c) $e^x < 3 \Leftrightarrow x < \ln 3$

d) $e^x(e^x - 3) \geq 0$ or $e^x > 0$ pour tout x , cela revient donc à résoudre $e^x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \ln 3$.

30. a) $5 - \ln x = 2 \Leftrightarrow \ln x = 3$ d'où $S = \{e^3\}$.

b) $e^{4x+1} = 5 \Leftrightarrow 4x+1 = \ln 5$ d'où $S = \left\{ \frac{\ln 5 - 1}{4} \right\}$.

c) Conditions d'existence : $2x + e > 0$

$\Leftrightarrow x \in I = \left] -\frac{e}{2}; +\infty \right[$.

$\ln(2x+e) = \ln e \Leftrightarrow 2x+e = e$ et $x \in I$ donc $S = \{0\}$.

d) Conditions d'existence : $x^2 + x - 6 > 0$

$\Delta = 25$; $x_1 = -3$ et $x_2 = 2$; il faut donc

$x \in I =]-\infty; -3[\cup]2; +\infty[$.

$\ln(x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 + x - 6) = \ln(1) \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 1$
 et $x \in I$.

$\Delta = 29$, $x_1 = \frac{-1-\sqrt{29}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{29}}{2}$

$S = \{x_1; x_2\}$.

31. a) Conditions d'existence :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{5}$	2	$+\infty$
$5x+1$	-	0	+	+
$x-2$	-	-	0	+
$\frac{5x+1}{x-2}$	+	0	-	+

$x \in I = \left] -\infty; -\frac{1}{5} \right[\cup]2; +\infty[$

$\ln\left(\frac{5x+1}{x-2}\right) \leq \ln(1) \Leftrightarrow \frac{5x+1}{x-2} \leq 1$ et $x \in I$

$\Leftrightarrow \frac{5x+1-(x-2)}{x-2} \leq 0$ et $x \in I$

$\Leftrightarrow \frac{4x+3}{x-2} \leq 0$ et $x \in I$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{4}$	2	$+\infty$
$4x+3$	$-$	0	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{4x+3}{x-2}$	$+$	0	$-$	$+$

$$S = \left[-\frac{3}{4}; -\frac{1}{5} \right]$$

b) Conditions d'existence :

$$x^2 + 2x > 0 \text{ soit } x \in]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$$

$$\ln(x^2 + 2x) - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 + 2x) > \ln(e)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - e > 0 \text{ et } x \in I$$

$$S =]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[\text{ avec } x_1 = \frac{-2 - \sqrt{2+2e}}{2} \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{2+2e}}{2}.$$

$$\text{c) } 6e^x - 1 \geq 3 - 4e^x \Leftrightarrow S = \left[\ln\left(\frac{2}{5}\right); +\infty \right[$$

d) $3e^{2x} - 9e^x < 0 \Leftrightarrow 3e^x(e^x - 3) < 0$ or $3e^x > 0$ il suffit d'étudier le signe de $e^x - 3$.

$$S =]-\infty; \ln 3[$$

$$\text{32. a) } (\ln x)^2 - 4\ln x - 5 = 0$$

$$\text{Avec } X = \ln x \text{ on a } X^2 - 4X - 5 = 0$$

$$\Delta = 36; X_1 = -1 \text{ et } X_2 = 5$$

$$\text{soit } \ln x = -1 \text{ et } \ln x = 5.$$

$$S = \{e^{-1}; e^5\}$$

b) Soit $X = e^x$; il s'agit alors de résoudre l'équation $X^2 - 2X - 8 = 0$.

$$\Delta = 36; X_1 = -2 \text{ et } X_2 = 4.$$

$$e^x = -2 : \text{impossible.}$$

$$e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4; S = \{\ln 4\}.$$

$$\text{33. 1. } \Delta = 9; X_1 = 5 \text{ et } X_2 = 2.$$

$$S =]2; 5[$$

2. On pose $X = \ln x$, l'équation devient alors :

$$-X^2 + 7X - 10 > 0$$

$$\text{on a alors } 2 < \ln x < 5 \text{ soit } e^2 < x < e^5$$

$$S =]e^2; e^5[.$$

34. [ERRATUM] La première édition du manuel utilise une équation dans cet exercice. C'est une erreur, qui est corrigée dans les éditions suivantes du manuel. La correction ci-dessous prend en compte cette correction, et utilise l'inéquation du nouvel énoncé : $-X^2 + 3X - 4 \geq 0$.

$$\text{1. } \Delta = 25; X_1 = -4 \text{ et } X_2 = 1$$

$$S =]-\infty; -4] \cup [1; +\infty[$$

2. En posant $X = \ln x$ on a alors $\ln x \leq -4$ ou $\ln x \geq 1$ c'est-à-dire $x \leq e^{-4}$ ou $x \geq e$.

$$S =]0; e^{-4}] \cup [e; +\infty[$$

35. 1. Soit $X = \ln x$ l'équation devient alors

$$X^2 - 2X - 3 = 0.$$

$$\Delta = 16; X_1 = -1 \text{ et } X_2 = 3.$$

$$\text{Soit } \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} \text{ ou } \ln x = 3 \Leftrightarrow x = e^3; S = \left\{ \frac{1}{e}; e^3 \right\}.$$

2. $\ln x(2\ln x - 1) = 0$; c'est une équation produit nul : $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $2\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$; d'où $S = \{1; \sqrt{e}\}.$

3. Soit $X = \ln x$ cela revient alors à résoudre $X^2 + X + 1 = 0$, $\Delta = -3$ l'équation n'a donc pas de solution. $S = \{\emptyset\}.$

Équations / inéquations avec $\ln u$

36. 1. a) Condition d'existence : $x > 2$ et $x < 4$ donc $x \in I =]2; 4[.$

$$3x - 6 = 4 - x \text{ et } x \in I \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

b) Condition d'existence : $x \in I =]5; +\infty[.$

$$\ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) = \ln(x-5) \text{ et } x \in I \Leftrightarrow \frac{2x}{x+1} = x-5 \text{ et}$$

$$x \in I \Leftrightarrow x^2 - 6x - 5 = 0 \text{ et } x \in I \Leftrightarrow x = 3 + \sqrt{14}.$$

$$\text{2. a) } x > \frac{1}{2} \text{ et } x \in I \Leftrightarrow x \in \left] \frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \frac{e}{40} \right[.$$

b) Condition d'existence : $x \in I =]1; 5[;$

$$5 - x \geq x - 1 \text{ et } x \in I \Leftrightarrow x \leq 3 \text{ et } x \in I \Leftrightarrow x \in]1; 3].$$

37. a) Conditions d'existence : $2x - 1 > 0$ et $x > 0$

$$\text{donc } x \in I = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[.$$

$$\ln(2x - 1) = \ln(x^2) \Leftrightarrow 2x - 1 = x^2 \text{ et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \text{ et } x \in I \Leftrightarrow (x - 1)^2 \text{ et } x \in I \text{ donc } S = \{1\}.$$

b) Conditions d'existence : $x + 1 > 0$ et $x - 1 > 0$ et $4 - 2x > 0$ donc $x \in I =]1; 2[$.

$$\ln((x + 1)(x - 1)) = \ln(4 - 2x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 4 - 2x \text{ et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 5 = 0 \text{ et } x \in I$$

$$\Delta = 24; x_1 = -1 - \sqrt{6} \text{ et } x_2 = -1 + \sqrt{6}$$

$$\text{donc } S = \{-1 + \sqrt{6}\}.$$

38. a) Conditions d'existence : $x^2 - 4x + 4 > 0$ et $x - 2 > 0$ et $8 - x > 0$ soit $x \in I =]2; 8[$.

$$\ln\left(\frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}\right) < \ln(8 - x) \text{ et } x \in I$$

$\Leftrightarrow \ln(x - 2) < \ln(8 - x)$ et $x \in I$ car $x^2 - 4x + 2 = (x - 2)^2$ ce qui revient à résoudre $x - 2 < 8 - x$ et $x \in I$; d'où $S =]2; 5[$.

b) [ERRATUM] La première édition du manuel utilise l'inéquation $\ln(2x + 4) + \ln(1 - x) - \ln 2 \geq \ln(e^{-x}) - 1$. C'est une erreur et les éditions suivantes ainsi que la correction ci-dessous utilisent l'inéquation suivante :

$$\ln(2x + 4) + \ln(1 - x) - \ln 2 \geq \ln(-x).$$

Conditions d'existence : $2x + 4 > 0$ et $1 - x > 0$ et $-x > 0$ soit $x \in I =]-2; 0[$.

$$\ln\left(\frac{(2x + 4)(1 - x)}{2}\right) \geq \ln(-x) \text{ et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)(1 - x) \leq -x \text{ et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow 2 - x^2 \leq 0 \text{ et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty[\text{ et } x \in I$$

$$\text{d'où } S =]-2; \sqrt{2}].$$

Propriétés algébriques de ln

$$\mathbf{39. 1. a)} \ln 25 - \ln 15 = \ln\left(\frac{25}{15}\right) = \ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$\mathbf{b)} \ln\left(\frac{1}{3}\right) + \ln 16 - \ln 5 = \ln\left(\frac{16}{15}\right)$$

$$\mathbf{2. a)} 4\ln 5 + 2\ln 5 + 3\ln 5 = 9\ln 5$$

$$\mathbf{b)} 3\ln 5 - \ln 5 - 2\ln 5 - 2\ln 5 = -2\ln 5$$

$$\mathbf{40. 1.} \quad 3\ln 2 - \ln 9 + \ln 5 = \ln 2^3 - \ln 9 + \ln 5 \\ = \ln\left(\frac{8}{9} \times 5\right) = \ln\left(\frac{40}{9}\right)$$

$$\mathbf{2)} \quad \ln 8 - 3\ln 4 + \ln \sqrt{2} = \ln 2^3 - \ln(2^2)^3 + \ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right) \\ = \ln\left(\frac{2^3}{2^6} \times 2^{\frac{1}{2}}\right) = \ln\left(2^{-\frac{5}{2}}\right) = -\frac{5}{2}\ln(2)$$

$$\mathbf{41. a)} e^{2\ln 3 + \ln 4} = e^{\ln(3^2 \times 4)} = 36$$

$$\mathbf{b)} e^{3\ln 2 - \ln 4} = e^{\ln\left(\frac{2^3}{4}\right)} = 2$$

$$\mathbf{c)} \frac{e^{\ln 6 + 1}}{e^{\ln 9 + 2}} = e^{\ln 6 + 1 - \ln 9 - 2} = e^{\ln\left(\frac{6}{9}\right) - 1} = \frac{6}{9} \times \frac{1}{e} = \frac{2}{3e}$$

$$\mathbf{d)} \frac{e^{2\ln 5 + \ln 3}}{e^{2\ln 3}} = \frac{e^{\ln(5^2 \times 3)}}{e^{\ln 3^2}} = \frac{5^2 \times 3}{3^2} = \frac{25}{3}$$

$$\mathbf{42.} \quad S = \sum_{k=1}^{100} \ln(k) - \ln(k+1) \\ = \sum_{k=1}^{100} \ln(k) - \sum_{k=1}^{100} \ln(k+1) \\ = \sum_{k=1}^{100} \ln(k) - \sum_{k=2}^{101} \ln(k) \\ = \ln(1) + \sum_{k=2}^{100} \ln(k) - \sum_{k=2}^{100} \ln(k) - \ln(101) \\ = -\ln(101)$$

$$\mathbf{43.} \quad \ln(e^x + 1) = \ln(e^x(1 + e^{-x})) \\ = \ln(e^x) + \ln(1 + e^{-x}) = x + \ln(1 + e^{-x})$$

$$\mathbf{44.} \quad \ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln 1 = 0 \text{ et } \ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{a}\right) \text{ d'où}$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a).$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) \\ = \ln(a) - \ln(b)$$

$$45. D_f = \{4 - x^2 > 0 \text{ et } 2 - x > 0\} \\ = \{-2 < x < 2 \text{ et } x < 2\} =]-2; 2[$$

$$D_g = \{2 + x > 0\} =]-2; +\infty[$$

Les deux fonctions f et g n'ont pas le même ensemble de définition, elles ne sont donc pas égales.

Inéquations du type $q^n < a$

$$46. a) n \ln\left(\frac{2}{3}\right) < \ln(10^{-4}) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(10^{-4})}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \text{ soit } n \geq 23.$$

$$b) n \ln\left(\frac{9}{7}\right) \geq \ln(10^6) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(10^6)}{\ln\left(\frac{9}{7}\right)} \text{ soit } n \geq 55.$$

$$c) \left(\frac{3}{5}\right)^n \leq 0,001 \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{3}{5}\right) \leq \ln(0,001) \\ \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,001)}{\ln\left(\frac{3}{5}\right)} \text{ soit } n \geq 14.$$

$$d) \ln(0,004) > 2n \ln\left(\frac{8}{9}\right) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,004)}{2 \ln\left(\frac{8}{9}\right)} \text{ soit } n \geq 24.$$

$$47. a) \left(\frac{1}{5}\right)^n \leq 0,001 \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{1}{5}\right) \leq \ln(0,001) \\ \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,001)}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)} \text{ soit } n \geq 5.$$

$$b) 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n > 0,999999 \Leftrightarrow 10^{-6} > \left(\frac{2}{5}\right)^n \\ \Leftrightarrow \ln(10^{-6}) > n \ln\left(\frac{2}{5}\right) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(10^{-6})}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} \text{ soit } n \geq 16.$$

$$c) 1,2^{2n} > 10^5 \Leftrightarrow 2n \ln(1,2) > \ln(10^5) \\ \Leftrightarrow n > \frac{\ln(10^5)}{2 \ln(1,2)} \text{ soit } n > 32.$$

$$d) 0,02 > \left(\frac{10}{11}\right)^n \Leftrightarrow \ln(0,02) > n \ln\left(\frac{10}{11}\right) \\ \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,02)}{\ln\left(\frac{10}{11}\right)} \text{ soit } n \geq 42.$$

$$48. u_n = u_0 \times q^n = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n \\ \text{On veut déterminer } n \text{ tel que } 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n > 10^6$$

$$\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{3}{2}\right) > \ln\left(\frac{10^6}{2}\right) \Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{10^6}{2}\right)}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} \text{ soit à partir de } \\ n = 33.$$

Tangentes, position relative de courbes

$$49. 1. T_1 : y = f'(1)(x - 1) + f(1) ; y = 2x - 1.$$

$$2. a) \text{ Étudier la position relative de } \mathcal{C}_f \text{ et de } T_1 \\ \text{revient à étudier le signe de} \\ 2 \ln x + 1 - (2x - 1) = 2 \ln x - 2x + 2 \\ = 2(\ln x - x + 1).$$

$$b) g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} ; \text{ sur }]0; +\infty[, x > 0.$$

$g'(x)$ est du signe de $1 - x$ qui est positif sur $]0; 1[$ et négatif sur $]1; +\infty[$; d'où g est croissante sur $]0; 1[$ et décroissante sur $]1; +\infty[$.

c) $g(1) = 0$, g admet un maximum nul, ce qui signifie que pour tout $x \in]0; +\infty[$; $g(x) \leq 0$.

d) La courbe $\mathcal{C}_f$ est alors en dessous de sa tangente $\mathcal{C}_1$.

$$50. 1. T_e : y = g'(e)(x - e) + g(e) \text{ or } g'(x) = -\frac{3}{x} + 2$$

$$\text{d'où } T_e : y = \left(-\frac{3}{e} + 2\right)(x - e) + 2e - 7 \text{ soit}$$

$$y = \left(-\frac{3}{e} + 2\right)x + 3 - 2e + 2e - 7$$

$$y = \left(-\frac{3}{e} + 2\right)x - 4$$

$$2. \text{ a) } g(x) - \left(-\frac{3}{e} + 2\right)x + 4 = -3\ln x + \frac{3}{e}x = 3\left(\frac{x}{e} - \ln x\right)$$

d'où étudier la position relative de $\mathcal{C}_g$ et de T_e revient bien à étudier le signe de $h(x)$.

$$\text{b) } h'(x) = 3\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{x}\right) = \frac{3(x-e)}{ex} \text{ puisque } 3 > 0 \text{ et } ex < 0$$

sur $]0; +\infty[$, étudier le signe de $h'(x)$ revient à étudier le signe de $x - e$.

x	0	e	$+\infty$
Signe de $h'(x)$	-	0	+
Sens de variation de h			

c) On en déduit que le minimum de h sur $\mathbb{R}_+^*$ est 0 ce qui signifie que la fonction h est positive sur $]0; +\infty[$.

d) Puisque le signe de h correspond au signe de $g(x) - \left(-\frac{3}{e} + 2\right)x - 4$ cela signifie que

$$g(x) - \left(-\frac{3}{e} + 2\right)x - 4 \geq 0 \text{ donc } \mathcal{C}_g \text{ est au-dessus}$$

de T_e .

51. Il s'agit d'étudier le signe de

$$f(x) - g(x)\ln(2x+1) \geq \ln(4-x) \text{ et } x \in I = \left]-\frac{1}{2}; 4\right[$$

$$\Leftrightarrow 2x+1 \geq 4-x \text{ et } x \in I \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow x \in [1; 4[$$

la courbe $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur

$$]1; 4[\text{ et strictement en dessous de } \mathcal{C}_g \text{ sur } \left]-\frac{1}{2}; 1\right[.$$

52. Il s'agit d'étudier le signe de $f(x) - g(x)$.

$$\ln(x^2 + 2x + 1) \geq \ln(-3x + 15) \text{ et } x \in I =]-1; 5[$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \geq -3x + 15 \text{ et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x - 14 \geq 0 \text{ et } x \in I$$

$$\Delta = 81; x_1 = -7 \text{ et } x_2 = 2$$

On a alors :

$$x \in]-\infty; -7] \cup [2; +\infty[\text{ et } x \in I \Leftrightarrow x \in [2; 5[.$$

Ce qui signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle $[2; 5[$ et strictement en-dessous sur l'intervalle $] -1; 2[$.

Étude de fonction avec ln

$$53. \text{ a) } f'(x) = \frac{1}{x}(x-2) + (\ln x + 3) \times 1$$

$$= 1 - \frac{2}{x} + \ln x$$

$$\text{b) } f'(x) = \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)(3\ln x + 1) - (x - \ln x)\left(\frac{3}{x}\right)}{(3\ln x + 1)^2}$$

$$= \frac{3\ln x - 2 - \frac{1}{x}}{(3\ln x + 1)^2} = \frac{3x\ln x - 2x - 1}{x(3\ln x + 1)^2}$$

$$\text{c) } f'(x) = 3(\ln(x) - 2x + 1)^2 \times \left(\frac{1}{x} - 2\right)$$

$$= \frac{3(1 - 2x)(\ln(x) - 2x + 1)^2}{x}$$

$$\text{d) } f'(x) = \frac{3 - 1 \times \ln x - x \times \frac{1}{x}}{2\sqrt{3x - x\ln(x)}} = \frac{2 - \ln x}{2\sqrt{3x - x\ln(x)}}$$

$$54. 1. \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{4}{x} = -\infty \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

par somme de limites.

$$2. f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}; f'(x) \text{ est positif comme somme}$$

de termes positifs sur $]0; +\infty[$. Par conséquent la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

$$55. g'(x) = \frac{\frac{1}{x}(\ln x - 1) - (\ln x + 1) \times \frac{1}{x}}{(\ln x - 1)^2}$$

$$= \frac{-\frac{2}{x}}{(\ln x - 1)^2} = -\frac{2}{x(\ln x - 1)^2}$$

sur D_g , $x > 0$ et $(\ln x - 1)^2 > 0$ donc $g'(x) < 0$. La fonction g est donc strictement décroissante sur D_g .

$$56. 1. g'(x) = 2(\ln x) \times \frac{1}{x} - \frac{6}{x} = \frac{2\ln x - 6}{x}$$

Sur $]0 ; +\infty[$, $x > 0$: le signe de $g'(x)$ ne dépend que du signe de $2\ln x - 6$.

$$2\ln x - 6 > 0 \Leftrightarrow x \in [e^3 ; +\infty[$$

x	0	e^3	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	-	0	+
Sens de variation de g			

2. a) Sur l'intervalle $]0 ; e^3[$, la fonction g est strictement décroissante, continue et pour tout $x \in]0 ; e^3[$; $g(x) \in I =]-4 ; +\infty[$. Or $0 \in I$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0 ; e^3[$. De même on montre que sur l'intervalle $]e^3 ; +\infty[$ l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution. Par conséquent l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $]0 ; +\infty[$.

b) $X = \ln x$

L'équation $g(x) = 0$ devient alors $X^2 - 6X + 5 = 0$

$$\Delta = 16 ; X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 5 \text{ soit}$$

$$\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e \text{ et } \ln x = 5 \Leftrightarrow x = e^5.$$

$$S = \{e ; e^5\}$$

Limites simples et indéterminées

57. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

donc par produit des limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \ln(x) = +\infty$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \ln(x) - 4 = +\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ par croissance comparée

et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x} = +\infty$ donc par somme des limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) + \frac{3}{x} = +\infty.$$

c) $5x^2 \ln(x) - 4x^2 = x^2(5\ln(x) - 4)$ or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 5\ln(x) - 4 = +\infty$ donc par produit des limites

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(5\ln(x) - 4) = +\infty$ d'où

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^2 \ln(x) - 4x^2 + 1 = +\infty$.

d) $\lim_{x \rightarrow 3} x - 3 = 0^+$

d'où $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x-3)}{x-3} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(X)}{X} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3} 3x = 9$ donc

par somme des limites on a $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x-3)}{x-3} + 3x = -\infty$.

58. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3 - 4x = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} 3 - 4x = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} \ln X = -\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} f(x) = -\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow -1} 2 - x = 3$ et $\lim_{x \rightarrow -1} x + 1 = 0^+$ donc par quotient

de limites $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2-x}{x+1} = +\infty$ or $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$ donc

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 2} 2 - x = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 2} x + 1 = 3$ donc par quotient de

limites $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{x+1} = 0$

or $\lim_{X \rightarrow 0} \ln X = -\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$.

59. a) $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x)^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -5\ln x = +\infty$ donc par

somme de limites : $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x)^2 - 5\ln x + 1 = +\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x = 0$ par croissance comparée et

$\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x} = -\infty$ donc par somme des limites

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x - \frac{1}{x} = -\infty$.

c) $\frac{\ln x \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\ln x \left(1 - \frac{4}{x}\right)} = \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{4}{x}}$

or $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{4}{x} = 1$ donc par quotient des

limites on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 2}{\ln x - 4} = 1$.

$$d) \frac{\frac{1}{2} \ln x}{\ln 2 + \ln x} = \frac{\frac{1}{2} \ln x}{\ln x \left(1 + \frac{\ln 2}{\ln x}\right)} = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{\ln 2}{\ln x}\right)}$$

or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2}{\ln x} = 0$ d'où par somme des limites :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln 2}{\ln x} = 1$ et par quotient des limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{\ln(2x)} = \frac{1}{2}.$$

e) [ERRATUM] L'expression utilisée dans la première édition du manuel est fautive et a été corrigée sur les éditions suivantes, les éditions suivantes et la correction ci-dessous utilisent :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x)^2 + 2 \ln x$$

$$\ln x (\ln x + 2)$$

or $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \ln x + 2 = -\infty$ donc par produit des

limites $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x)^2 + 2 \ln x = +\infty$.

f) $\lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} X^2 \ln X = 0$ par croissance comparée donc $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 \ln(x - 1) = 0$.

$$60. 1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) \text{ avec}$$

$$f(x) = \ln(1+x). \text{ Or } f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$\text{donc } f'(0) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}} \frac{\ln(5x)}{5x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}} \frac{\ln((5x - 1) + 1)}{5x - 1} \text{ or } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}} 5x - 1 = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(X+1)}{X} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}} \frac{\ln(5x)}{5x - 1} = 1.$$

Dérivées de fonctions du type $\ln u$

$$61. a) D_f = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[; f'(x) = \frac{8}{8x - 4} = \frac{2}{2x - 1}$$

$$b) D_f = \mathbb{R}; f'(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$$

$$c) D_f =]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[;$$

$$f'(x) = \frac{1 \times (2x + 4) - (x - 1) \times 2}{\frac{(2x + 4)^2}{x - 1}} = \frac{6}{(2x + 4)(x - 1)}$$

$$d) D_f =]0; +\infty[; f'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

$$62. a) D_f =]-\infty; 4[$$

$$\text{et } f'(x) = \frac{\frac{-1}{2\sqrt{4-x}}}{(\sqrt{4-x})^2} = \frac{-1}{2\sqrt{4-x}(4-x)}$$

$$b) D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid \ln 2x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x > 1\} = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$$

$$\text{et } f'(x) = \frac{\frac{2}{2x}}{\ln 2x} = \frac{1}{x \ln 2x}.$$

$$c) D_f = \mathbb{R} \text{ et } f'(x) = 2x \ln(e^x + 1) + x^2 \frac{e^x}{e^x + 1} = 2x \ln(e^x + 1) + \frac{x^2 e^x}{e^x + 1}$$

$$d) D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \neq 0 \text{ et } x^2 - 1 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 \text{ et } x \neq 1 \text{ et } x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[\} =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2 - 1}(x^2 - 1) - \ln(x^2 - 1)(2x)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{2x(1 - \ln(x^2 - 1))}{(x^2 - 1)^2}$$

$$e) D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{4} \right\}$$

$$f'(x) = \frac{2(4x - 1) \times 4}{(4x - 1)^2} = \frac{8}{4x - 1}$$

$$f) D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 > 0\} =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$$

$$f'(x) = 3(\ln(x^2 - 1))^2 \times \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{6x(\ln(x^2 - 1))^2}{x^2 - 1}$$

Exercices d'entraînement p. 186-191

La fonction $\ln$

63. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x)^2 = +\infty$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -(1+e)\ln x = +\infty$

donc par somme de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$f(x) = \ln x (\ln x - (1+e)) + e$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - (1+e)) = +\infty$ donc par pro-

duit des limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. a) $f'(x) = 2\ln x \times \frac{1}{x} - \frac{1+e}{x} = \frac{2\ln x - 1 - e}{x}$

b) Sur $]0 ; +\infty[$; $x > 0$ le signe de $f'(x)$ ne dépend donc que du signe de $2\ln x - 1 - e$.

$2\ln x - 1 - e > 0 \Leftrightarrow \ln x > \frac{1+e}{2} \Leftrightarrow x > e^{\frac{1+e}{2}}$

x	0	$e^{\frac{1+e}{2}}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Sens de variation de f	$+\infty \swarrow \quad \searrow \quad \nearrow +\infty$ $-\frac{(e-1)^2}{4}$		

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1+e}{2}\right) &= \frac{(1+e)^2}{4} - \frac{(1+e)^2}{2} + e \\ &= \frac{-(1+e)^2 + 4e}{4} \\ &= \frac{-e^2 + 2e - 1}{4} \\ &= -\frac{(1+e)^2}{4} \end{aligned}$$

c) Sur l'intervalle $\left]0 ; \frac{1+e}{2}\right]$, f est une fonction strictement décroissante et continue, de plus pour tout $x \in \left]0 ; \frac{1+e}{2}\right]$, $f(x) \in \left]-\frac{(e-1)^2}{4} ; +\infty\right[$; or $0 \in \left]-\frac{(e-1)^2}{4} ; +\infty\right[$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\left]0 ; \frac{1+e}{2}\right]$. De même,

on montre que sur l'intervalle $\left[\frac{1+e}{2} ; +\infty\right[$,

l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution. Conclusion : f admet deux antécédents de 0 sur $]0 ; +\infty[$.

d) Il s'agit de résoudre l'équation

$(\ln x)^2 - (1+e)\ln x + e = 0$.

On pose $X = \ln x$, l'équation revient alors à résoudre : $X^2 - (1+e)X + e = 0$

$\Delta = (1+e)^2 - 4e = 1 - 2e + e^2 = (1-e)^2$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{(1-e)^2} = |1-e| = e-1$

D'où $X_1 = \frac{1+e-(e-1)}{2} = 1$ et $X_2 = \frac{1+e+(e-1)}{2} = e$.

Soit $\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$ ou $\ln x = e \Leftrightarrow x = e^e$.

Conclusion : on retrouve bien deux antécédents pour 0 dont les valeurs exactes sont e et e^e .

64. A. 1. $g'(x) = 6x^2 + \frac{2}{x}$; sur $]0 ; +\infty[$, $g'(x)$ est strictement positive comme somme de termes positifs, la fonction g est donc strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} 2x^3 - 1 = -1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$

donc par somme de limites $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 - 1 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ donc par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

La fonction g est donc strictement croissante et continue sur $]0 ; +\infty[$, de plus pour tout $x \in]0 ; +\infty[$; $g(x) \in \mathbb{R}$; or $0 \in \mathbb{R}$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

À l'aide de la calculatrice on a : $\alpha \approx 0,86$.

3.

x	0	α	$+\infty$
Sens de variation de g	$\nearrow$ 0		
Signe de g	-	0	+

B. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\ln x}{x^2} = +\infty$ donc par somme de limites $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ par croissance comparée, donc par somme des limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Il s'agit d'étudier le signe de $f(x) - 2x = -\frac{\ln x}{x^2}$; or pour tout $x \in]0 ; +\infty[; x^2 > 0$. Le signe de cette différence ne dépend donc que du signe de $-\ln x$. Sur $]0 ; 1[$, $-\ln x > 0$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est donc strictement au-dessus de Δ . Sur $]1 ; +\infty[$, $-\ln x < 0$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est donc strictement en-dessous de Δ .

$$\begin{aligned} 3. f'(x) &= 2 - \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4} = 2 - \frac{x - 2x \ln x}{x^4} \\ &= 2 - \frac{1 - 2 \ln x}{x^3} = \frac{2x^3 - 1 + 2 \ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3} \end{aligned}$$

Or sur $]0 ; +\infty[$, $x^3 > 0$, le signe de $f'(x)$ ne dépend donc que du signe de $g(x)$.

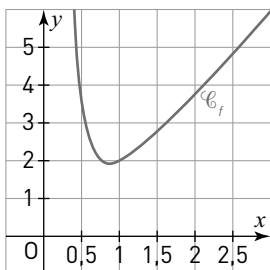
4.

x	0	α	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Sens de variation de f	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

Avec $f(\alpha) = \frac{6\alpha^3 - 1}{2\alpha^2}$ car $2\alpha^3 - 1 + 2 \ln \alpha = 0$ soit

$$\ln \alpha = \frac{1}{2} - \alpha^3.$$

5.



65. 1. $g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$; sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$, $g'(x)$

est strictement positive comme somme de termes positifs, donc la fonction g est strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$.

Or $g(1) = 0$; le minimum de g étant nul cela signifie que la fonction g est positive sur $[1 ; +\infty[$.

$$\begin{aligned} 2. a) f'(x) &= 1 - \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = 1 - \frac{1 - \ln x}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

b) Puisque la fonction g est positive sur $[1 ; +\infty[$; et que $x^2 > 0$; alors $f'(x) \geq 0$ sur $[1 ; +\infty[$; par conséquent la fonction f est croissante sur $[1 ; +\infty[$.

c) Il s'agit d'étudier le signe de $f(x) - x = -\frac{\ln x}{x}$.

Sur $[1 ; +\infty[$, $x > 0$ et $-\ln x < 0$ par conséquent $f(x) - x < 0$ sur $[1 ; +\infty[$, ce qui signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous de la droite D sur $[1 ; +\infty[$.

$$3. a) M_k \left(k ; k - \frac{\ln k}{k} \right) \text{ et } N_k(k ; k)$$

$$\text{d'où } M_k N_k = k - \left(k - \frac{\ln k}{k} \right) = \frac{\ln k}{k}.$$

b)

```

N ← 2
D ← ln 2 / 2
Tant que D > 10-2
    N ← N + 1
    D ← ln N / N
Fin du Tant que
    
```

On trouve $k_0 = 648$.

66. A. 1. $f(1) = 3$; $f'(1) = 2$ et $f(2) = 4 \ln 2 + 1$.

$$2. f(1) = 3 \Leftrightarrow b + c = 3$$

$$f'(x) = \frac{a}{x} + b \text{ d'où}$$

$$f'(1) = 2 \Leftrightarrow a + b = 2$$

$$f(2) = 4 \ln 2 + 1 \Leftrightarrow a \ln 2 + 2b + c = 4 \ln 2 + 1$$

Par identification : $a = 4$ et $2b + c = 1$.

On doit alors résoudre :

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ b + c = 3 \\ 2b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = 5 \end{cases}$$

on a alors : $f(x) = 4 \ln x - 2x + 5$.

$$3. S = [1 ; 3,5]$$

B. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} 4 \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -2x + 5 = 5$ donc par somme des limites $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$.

$$g(x) = x \left(\frac{4 \ln x}{x} - 2 \right) + 5$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par croissance comparée donc

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln x}{x} - 2 = -2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ d'où par produit des limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

2. et 3. $g'(x) = \frac{2}{x} - 1 = \frac{2-x}{x}$ sur $]0; +\infty[$ $x > 0$ donc

le signe de $g'(x)$ ne dépend que du signe de $2-x$.

x	0	2	$+\infty$
Signe de $g'(x)$		+	0 -
Sens de variation de g			

4. $g(1) = 2 \ln 1 - 1 + 1 = 0$

1 est donc bien solution de l'équation $g(x) = 0$.

5. La fonction g est strictement décroissante sur $[2; +\infty[$ et continue ; de plus pour tout $x \in [2; +\infty[$ on a $g(x) \in]-\infty; 2 \ln 2 - 1]$ or $x \in I$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

$\alpha \approx 3,51$

6.

x	0	1	2	$+\infty$
Sens de variation de g				
Signe de g	-	0	+	0 -

7. $f(x) \geq 3 \Leftrightarrow 4 \ln x - 2x + 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow 2 \ln x - x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0$

$S = [1; \alpha]$

67. 1. a) $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x)^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -2 \ln x = +\infty$

donc par somme des limites $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

$f(x) = \ln x (\ln x - 2)$; or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - 2 = +\infty$,

donc par produit des limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b) La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale, l'axe des ordonnées.

2. a) $f'(x) = 2 \ln x \times \frac{1}{x} - \frac{2}{x} = \frac{2 \ln x - 2}{x} = \frac{2(\ln x - 1)}{x}$

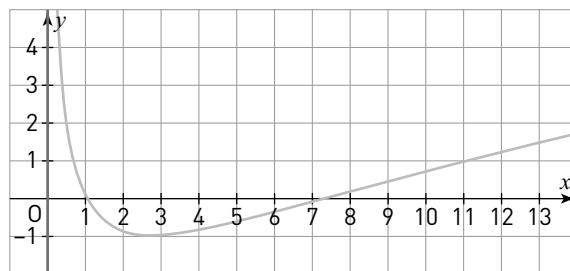
b) Sur $]0; +\infty[$, $x > 0$ et $2 > 0$: le signe de $f'(x)$ ne dépend donc que du signe de $\ln x - 1$.

$\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$

x	0	e	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		-	0 +
Sens de variation de f			

3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x (\ln x - 2) = 0$; il s'agit d'une équation produit nul ; $\ln x = 0$ ou $\ln x - 2 = 0$; $S = \{1; e^2\}$.

4.



68. 1. $e^x - x^n = 0$ avec $x \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow e^x = x^n$; $x \in \mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow x = n \ln x$; $x \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \frac{x}{n} = \ln x$; $x \in \mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow \ln x - \frac{x}{n} = 0$; $x \in \mathbb{R}_+^*$

2. $f(x) = \ln x - \frac{x}{n}$; on a $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{n}$

$\frac{1}{x} - \frac{1}{n} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{n} \Leftrightarrow x < n$

x	0	n	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0 -
Sens de variation de f			

pour la limite de f en $+\infty$: $f(x) = x \left(-\frac{1}{n} + \frac{\ln x}{x} \right)$.

Afin que l'équation (E_1) admette deux solutions il faut que $\ln n - 1 > 0$ afin que le théorème des valeurs intermédiaires puisse être appliqué.
 $\ln n > 1 \Leftrightarrow n > e$ soit $n \geq 3$.

69. 1. a) $f(1) = 2$; $f'(1) = 0$

$$\text{b) } f'(x) = \frac{\frac{b}{x} \times x - (a + b \ln x) \times 1}{x^2} = \frac{(b-a) - b \ln x}{x^2}$$

c) $f(1) = 2 \Leftrightarrow a = 2$

$f'(1) = 0 \Leftrightarrow (b-a) = 0$ avec $a = 2$

on a alors $b = 2$; $f(x) = \frac{2+2\ln x}{x}$.

2. a) $f'(x) = \frac{-2\ln x}{x^2}$; puisque $\frac{2}{x^2} > 0$ sur $]0 ; +\infty[$;

$f'(x)$ a alors le même signe que $-\ln x$ c'est-à-dire $f(x) > 0$ pour $x \in]0 ; 1[$ et $f(x) < 0$ pour $x \in]1 ; +\infty[$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} 2 + 2\ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0^+$ donc par quotient

des limites $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+2\ln x}{x} = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par croissance comparée donc par somme des limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

c)

x	0	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Sens de variation de f			

3. a) Sur l'intervalle $]0 ; 1[$; la fonction f est strictement croissante et continue, de plus pour tout $x \in]0 ; 1[$; $f(x) \in]-\infty ; 2[$ or $0 \in]-\infty ; 2[$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0 ; 1[$.

b) À l'aide de la calculatrice, en traçant la courbe $\mathcal{C}_f$ et en cherchant la valeur de l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la droite d'équation $y = 1$; on détermine : $5 < \beta < 6$.

4. a) [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur à la 5^e ligne du programme, les éditions suivantes sont corrigées et on lit : $a = 0$.

Cette fonction Python permet de calculer l'image de x par f .

b) Ce programme permet de déterminer un encadrement de α à 10^{-1} près.

c) Il faudrait changer :

$b - a > 0,1$ en $b - a > 0,01$

et l'instruction if serait à changer sous la forme :

```

if f(m) > 1 :
    a = m
else :
    b = m
    
```

$$\begin{aligned} \text{70. 1. } g'(x) &= -\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{\frac{2}{x} \times x - 2\ln x \times 1}{x^2} \\ &= -\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2-2\ln x}{x^2} \\ &= \frac{-3x-2+2-2\ln x}{x^2} = \frac{-3x-2\ln x}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2} \end{aligned}$$

2. a) $h'(x) = -3 - \frac{2}{x}$; puisque $x \in]0 ; +\infty[$ alors

$h'(x) < 0$ comme somme de termes négatifs.

La fonction h est donc décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} -3x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -2\ln x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$ par somme des limites.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2\ln x = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$ par somme des limites.

Sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ la fonction h est strictement décroissante et continue, de plus pour tout $x \in]0 ; +\infty[$; $f(x) \in \mathbb{R}$; or $0 \in \mathbb{R}$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α .

c)

x	0	α	$+\infty$
Sens de variation de h	$+\infty$	0	$-\infty$
Signe de h	+	0	-

3. a) Le signe de $g'(x)$ est le même que celui de $h(x)$ puisque $x^2 > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	0	α	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	+	0	-
Sens de variation de g			

La fonction g est donc strictement croissante sur $]0 ; \alpha[$ et strictement décroissante sur $]\alpha ; +\infty[$.

$$b) h(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -3\alpha - 2\ln \alpha = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = -\frac{3}{2}\alpha$$

$$\text{Or } g(\alpha) = 3 - 3\ln \alpha + \frac{2}{\alpha} + \frac{2\ln \alpha}{\alpha}$$

$$\begin{aligned} &= 3 - 3 \times \left(-\frac{3}{2}\alpha\right) + \frac{2}{\alpha} + \frac{\left(2 \times \left(-\frac{3}{2}\alpha\right)\right)}{\alpha} \\ &= 3 + \frac{9}{2}\alpha + \frac{2}{\alpha} - 3 = \frac{4,5\alpha^2 + 2}{\alpha}. \end{aligned}$$

D'après le tableau de variation, on en déduit donc que la fonction g admet un maximum en α valant

$$g(\alpha) = \frac{4,5\alpha^2 + 2}{\alpha}.$$

Fonctions du type $\ln(u(x))$

71. [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur. Les éditions suivantes sont corrigées et on utilise l'ensemble de définition $[1 ; +\infty[$, ainsi que la fonction g utilisant

$$\ln\left(\frac{1}{x^2 + x - 1}\right).$$

1. Pour que les deux courbes s'interceptent il faut

$$\text{que } f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{x^2 + 50x}\right) = \ln\left(\frac{1}{x^2 + x - 1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 + 50x) = \ln(x^2 + x - 1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 50x = x^2 + x - 1 \text{ et } x \in [1 ; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow 49x = -1 \text{ et } x \in [1 ; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{49} \text{ et } x \in [1 ; +\infty[\text{ ce qui est}$$

impossible ; par conséquent il n'existe pas de point de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ en lequel les deux courbes s'interceptent.

2. a) La distance AB tend vers 0.

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 50x}\right)$$

$$\text{or } \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 50x} = \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{50}{x}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{50}{x}}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{50}{x} = 1 \text{ donc par quotient}$$

$$\text{des limites : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 50x} = 1.$$

Or $\lim_{X \rightarrow 1} X = 0$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$ ce qui signifie que cette distance AB tend vers 0.

72. 1. La fonction $\mathcal{C}_g$ passe par le point A(0 ; 1) : cela signifie que $g(0) = 1 \Leftrightarrow \ln(b) = 1 \Leftrightarrow b = e$. Le fait que la courbe $\mathcal{C}_g$ admette au point d'abscisse 1 la droite d comme tangente signifie que $g'(1) = 2$.

$$\text{Or } g'(x) = \frac{a}{ax + b} \text{ d'où } g'(1) = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{a + b} = 2$$

$$\text{or } b = e \text{ d'où } \frac{a}{a + e} = 2 \Leftrightarrow a = 2a + 2e \Leftrightarrow a = -2e.$$

On a alors

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(-2ex + e) = \ln(e(-2x + 1)) \\ &= \ln e + \ln(-2x + 1) = 1 + \ln(-2x + 1). \end{aligned}$$

$$2. D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid -2x + 1 > 0\} = \left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[= I$$

$$g'(x) = -\frac{2e}{-2ex + e} = \frac{2}{2x - 1}; \text{ le signe de } g'(x) \text{ est donc}$$

le même que celui de $2x - 1$.

$$\text{Or sur l'intervalle } \left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[, 2x - 1 < 0 \text{ soit}$$

$g'(x) < 0$: par conséquent la fonction g est strictement décroissante sur I .

73. 1. Afin que f soit bien définie sur $\mathbb{R}$, il faut que $e^{-x} + 1 > 0$ or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ donc $e^{-x} + 1 > 0$ sur tout $\mathbb{R}$.

$$2. a) \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \text{ or } \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} + 1 = 1 \text{ et}$$

$$\lim_{X \rightarrow 1} \ln X = 0 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

b) $\mathcal{C}_f$ admet donc l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $+\infty$.

3. a) $f'(x) = -\frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ et $e^{-x} + 1 > 0$ donc $f'(x) < 0$, la fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

4. a) $f(x) = \ln(e^{-x}(1 + e^x)) = \ln(e^{-x}) + \ln(1 + e^x)$
 $= -x + \ln(1 + e^x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + e^x) = 0$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln X = 0$.

Par conséquent $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x)) = 0$ donc la droite d

d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe en $-\infty$.

c) $f(x) - (-x) = \ln(1 + e^x)$ puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + e^x > 1$ alors $\ln(1 + e^x) > 0$ ce qui signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite d sur $\mathbb{R}$.

74. 1. $\lim_{x \rightarrow -1} x + 1 = 0$ or $\lim_{X \rightarrow 0} \ln X = -\infty$ d'où

$\lim_{x \rightarrow -1} -2\ln(x + 1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{2}$ donc par

somme des limites on a $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$.

$f(x) = (x + 1) \left(\frac{1}{2} - \frac{2\ln(x + 1)}{x + 1} \right) + \frac{1}{2}$ or $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ par

croissance comparée

d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} - \frac{2\ln(x + 1)}{x + 1} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$ par pro-

duit on en déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x + 1} = \frac{x + 1 - 4}{2(x + 1)} = \frac{x - 3}{2(x + 1)}$

x	-1	3	$+\infty$	
$x - 3$	$-$	0	$+$	
$2(x - 1)$	0	$+$	$+$	
Signe de $f'(x)$	$ $	$-$	0	$+$
Sens de variation de f	$+\infty \searrow \frac{5}{2} - 2\ln 4 \nearrow +\infty$			

3. [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur la droite d'équation $y = x$ est utilisée. Les versions suivantes ainsi que la correction ci-dessous utilisent la droite d'équation $y = -x$.

Il s'agit de résoudre l'équation :

$f'(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{x - 3}{2(x + 1)} = -1 ; x \in]-1 ; +\infty[$

$\Leftrightarrow x - 3 = -2(x + 1) ; x \in]-1 ; +\infty[\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} ;$
 $x \in]-1 ; +\infty[$. Il existe donc une tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{1}{3}$, parallèle à la droite d'équation $y = -x$.

$T_{\frac{1}{3}} : y = f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right)$

$y = -\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{7}{6} - 2\ln\left(\frac{4}{3}\right) = -x + \frac{3}{2} - 2\ln\left(\frac{4}{3}\right)$

4. $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = -2\ln(x + 1)$

Pour tout $x \in]-1 ; 0[$ on a $0 < x + 1 < 1$ donc $\ln(x + 1) < 0$ et pour tout $x \in]0 ; +\infty[$ on a $\ln(x + 1) > 0$ par conséquent la courbe $\mathcal{C}$ est strictement en-dessous de la droite d sur l'intervalle $]-1 ; 0[$ et strictement au-dessus sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

75. 1. $f(-1) = \ln 2 \Leftrightarrow \ln(a - b + c) = \ln 2$
 $\Leftrightarrow a - b + c = 2$

$f\left(-\frac{1}{4}\right) = \ln\left(\frac{7}{8}\right)$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{a}{16} - \frac{b}{4} + c\right) = \ln\left(\frac{7}{8}\right)$

$\ln\left(\frac{7}{8}\right) \Leftrightarrow \frac{a}{2} - 2b + 8c = 7$

$f(0) = 0 \Leftrightarrow \ln(c) = 0 \Leftrightarrow c = 1$

Il s'agit de résoudre

$\begin{cases} a - b + 1 = 2 \\ \frac{a}{2} - 2b + 8 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ a - 4b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 2 \end{cases}$

on a alors $f(x) = \ln(2x^2 + x + 1)$.

2. $f'(x) = \frac{4x + 1}{2x^2 + x + 1}$

Signe de $2x^2 + x + 1 : \Delta = -7$ ce qui signifie que le polynôme est toujours du signe de $a = 2$; donc toujours positif, le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de $4x + 1$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Sens de variation de f	$+\infty \rightarrow \ln\left(\frac{7}{8}\right) \rightarrow +\infty$		

$$f(x) = x^2 \left(2 + \frac{1}{x} \right) + 1 \quad \text{or} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2$$

donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 + x + 1 = +\infty \quad \text{or} \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty \quad \text{donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$f(-1) = \ln(2 \times 1 - 1 + 1) \ln 2$$

$$f(0) = \ln 1 = 0$$

76. [ERRATUM] Sur la première édition du manuel, la courbe affichée pour cet exercice n'est pas la bonne. Cette erreur est corrigée sur les éditions suivantes.

$$1. f(-x) = \ln\left(\frac{5+x}{5-x}\right) = -\ln\left(\frac{1}{\frac{5+x}{5-x}}\right) = -\ln\left(\frac{5-x}{5+x}\right) \quad \text{on en}$$

déduit donc $f(-x) = -f(x)$ autrement dit la fonction f est impaire ce qui signifie que $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

$$2. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -5^+} 5+x = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -5^-} 5-x = 10 \quad \text{or} \quad \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{10}{X} = +\infty$$

donc $\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = +\infty$.

Ce qui signifie que $\mathcal{C}_f$ admet la droite $d : x = -5$ comme asymptote verticale.

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(x) &= \frac{\frac{-(5+x) - (5-x)}{(5+x)^2}}{\frac{5-x}{5+x}} = \frac{-10}{(5+x)^2} \times \frac{5+x}{5-x} \\ &= \frac{-10}{(5+x)(5-x)} \end{aligned}$$

Sur $]-5; 0[$ on a $5-x > 0$; $5+x > 0$ donc $f'(x) < 0$; la fonction f est donc décroissante sur $]-5; 0[$.

$$\text{c) } T_0 : y = f'(0)x + f(0) = -0,4x.$$

3. a) sur l'intervalle $]-5; 0[$ la tangente semble être au-dessus de la courbe $\mathcal{C}$ et sur l'intervalle $0; 5[$ la tangente semble être en dessous.

b) Il faut étudier le signe de

$$f(x) - 0,4x = \ln\left(\frac{5-x}{5+x}\right) + 0,4x, \quad \text{il s'agit donc bien d'étudier le signe de } h.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } h'(x) &= \frac{-10}{(5+x)(5-x)} + \frac{2}{5} \\ &= \frac{-50 + 2(5+x)(5-x)}{5(5+x)(5-x)} = \frac{-2x^2}{5(5+x)(5-x)}. \end{aligned}$$

d)

x	-5	0	5
Signe de $-2x^2$	-	0	-
Signe de $5(5+x)(5-x)$	0	+	+
Signe de $h'(x)$	0	-	-
Sens de variation de h	$0 \rightarrow$		

e) Sur $]-5; 0[$, $h(x) > 0$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la tangente. Sur $0; 5[$; $h(x) < 0$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous de la tangente.

77. A. Il semble y avoir deux solutions α et β vérifiant $-1 < \alpha < 0$ et $0 < \beta < 1$.

$$\text{B. 1. a) } x^2 + x^3 = x^2(1+x)$$

Pour tout $x \in]-\infty; -1[$ on a $x^2 + x^3 < 0$. Sur $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$ on a $x^2 + x^3 > 0$ et l'expression s'annule en -1 et 0 .

b) Sur l'intervalle $]-\infty; -1[$, puisque $3(x^2 + x^3)$ est négatif, l'équation n'a pas de solution car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.

c) en 0 , le membre de droite $3(x^2 + x^3)$ est nul, tandis que le membre de gauche est strictement positif, donc 0 n'est pas solution de (E) .

2. Pour tout $x \in I =]-1; 0[\cup]0; +\infty[$,

$$3(x^2 + x^3) > 0.$$

$$(E) \Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(3(x^2 + x^3)) \quad \text{et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow x = \ln 3 + \ln(x^2(1+x)) \quad \text{et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow x = \ln 3 + \ln(x^2) + \ln(1+x) \quad \text{et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow \ln 3 + \ln(x^2) + \ln(1+x) - x = 0 \quad \text{et } x \in I$$

3. a) $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(1+x) = -\infty$ donc par somme de limites

$$\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = -\infty.$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x^2) = -\infty$ donc par somme des limites

$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -\infty$.

$$h(x) = x \left(\frac{2 \ln(x)}{x} + \frac{\ln(1+x)}{1+x} \times \frac{1+x}{x} - 1 \right) + \ln 3$$

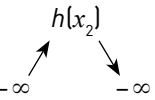
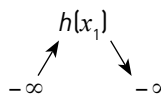
$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x}$$

$$\frac{1+x}{x} = \frac{1}{x} + 1 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{x} = 1 \text{ par produit et somme}$$

de limites on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$.

$$\begin{aligned} \text{b) } h'(x) &= \frac{2}{x} + \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{2(1+x) + x - (1+x)x}{x(1+x)} \\ &= \frac{2+3x-x-x^2}{x(1+x)} = \frac{-x^2+2x+2}{x(x+1)} \end{aligned}$$

$$\text{c) } \Delta = 12; x_1 = 1 + \sqrt{3} \text{ et } x_2 = 1 - \sqrt{3}$$

x	-1	x_2	0	x_1	$+\infty$			
$-x^2+2x+2$	-	0	+	+	0	-		
$x(x+1)$	0	-	-	0	+	+		
Signe de $h'(x)$		+	0	-		+	0	-
Sens de variation de h								

$h(x_2) \approx -0,11 < 0$ et $h(x_1) \approx 1,69 > 0$.

d) Sur l'intervalle $]-1; 0[$, la fonction h est négative donc l'équation $h(x) = 0$ n'a pas de solution. Sur l'intervalle $]0; x_1[$, la fonction h est strictement croissante et continue, de plus pour tout $x \in]0; x_1[$, on a $h(x) \in]-\infty; h(x_1)[$ or $0 \in]-\infty; h(x_1)[$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur cet intervalle. De même on démontre que sur l'intervalle $]x_1; +\infty[$, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution β .

$\alpha \approx 0,62$ et $\beta \approx 7,12$.

e) La conjecture faite au A. ne pouvait pas être complète car la fenêtre graphique ne permet pas de voir les courbes pour $x > 6$, or la deuxième solution trouvée est supérieure à 7.

Quant à l'éventuelle solution sur $]-1; 0[$; il aurait fallu un pas plus précis sur l'axe des ordonnées afin de mieux voir que les deux courbes ne s'intersectent pas à cet endroit.

$$\text{78. 1. } D_f = \{x \in \mathbb{R}; 2x+1 > 0 \text{ et } x-4 > 0\}$$

$$=]4; +\infty[\text{ et } D_g = \left\{ x \in \mathbb{R}; \frac{2x+1}{x-4} > 0 \right\}$$

$$=]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]4; +\infty[. \text{ Puisque } D_f \neq D_g \text{ les}$$

deux fonctions ne sont donc pas égales.

$$\text{2. a) } \lim_{x \rightarrow 4} x - 4 = 0^+ \text{ et } \lim_{x \rightarrow 4} 2x + 1 = 9 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 4} g(x) = +\infty.$$

$$g(x) = \frac{x \left(2 + \frac{1}{x} \right)}{x \left(1 - \frac{4}{x} \right)} = \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{4}{x}} \text{ or } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{4}{x} = 1 \text{ donc par quotient et composée des}$$

$$\text{limites : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ln 2.$$

$$\text{b) } g'(x) = f'(x) \text{ sur }]4; +\infty[\text{ soit}$$

$$g'(x) = \frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x-4} = \frac{-9}{(2x+1)(x-4)}.$$

$$\text{3. a) Il s'agit de résoudre l'équation } g'(x) = m$$

$$\Leftrightarrow \frac{-9}{(2x+1)(x-4)} = m \Leftrightarrow \frac{-9 - m(2x+1)(x-4)}{(2x+1)(x-4)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2mx^2 + 7mx + 4m - 5}{(2x+1)(x-4)} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2mx^2 + 7mx + 4m - 5 = 0; x \in]4; +\infty[.$$

$$\Delta = (7m)^2 - 04 \times (-2m) \times (4m - 5)$$

$$= 81m^2 - 40m = m(81m - 40)$$

$$m_1 = 0 \text{ et } m_2 = \frac{40}{81}.$$

$$\text{Pour tout } m \in]-\infty; 0[\cup \left] \frac{40}{81}; +\infty \right[\text{ on a } \Delta > 0.$$

L'équation admet donc deux solutions distinctes, donc pour ces valeurs de m , il existe deux tangentes parallèles à la droite d_m .

$$\text{Pour } m = 0 \text{ ou } m = \frac{40}{81}; \Delta = 0 \text{ ce qui signifie que}$$

$$\text{l'équation n'a qu'une seule solution et donc il existe une seule tangente parallèle à } d_m \text{ pour ces}$$

$$\text{valeurs de } m. \text{ Pour tout } m \in \left] 0; \frac{40}{81} \right[\text{ on a } \Delta < 0$$

ce qui signifie que l'équation n'a aucune solution, donc pour ces valeurs de m il n'existe aucune tangente parallèle à d_m .

b) Les tangentes à $\mathcal{C}_g$ ont pour équation

$$y = g'(a)(x - a) + g(a)$$

$$\text{soit } y = \frac{-9}{(2a+1)(a-4)}(x-a) + \ln \frac{2a+1}{a-4}.$$

Afin que la tangente passe par l'origine du repère

$$\text{il faut que } \frac{9a}{(2a+1)(a-4)} + \ln \frac{2a+1}{a-4} = 0.$$

$$\text{Utilisons } h(x) = \frac{9x}{(x-4)(2x+1)} + \ln \frac{2x+1}{x-4}.$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{9(x-4)(2x+1) - 9x(4x-7)}{(x-4)^2(2x+1)^2} + \frac{-9}{(2x+1)(x-4)} \\ &= \frac{9(x-4)(2x+1) - 9x(4x-7) - 9(2x+1)(x-4)}{(x-4)^2(2x+1)^2} \\ &= \frac{-9x(4x-7)}{(x-4)^2(2x+1)^2} \end{aligned}$$

Le signe de $h'(x)$ ne dépend que du signe de $-9x(4x-7)$ qui est toujours négatif sur $]4; +\infty[$.

x	4	$+\infty$
Sens de variation de h	$\ln 2$	$-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = -\infty \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow 4} h(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x}{(x-4)(2x+1)} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ln 2 \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ln 2.$$

Sur l'intervalle $]4; +\infty[$ la fonction h est strictement croissante et continue, de plus pour tout $x \in]4; \infty[$, $h(x) \in]-\infty; \ln 2[$ or $0 \in]-\infty; \ln 2[$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α . Il existe donc une tangente à $\mathcal{C}_g$ en α passant par l'origine du repère.

ln et suites

$$79. \text{ A. 1. a) } f(x) = (1+2x) \left(\frac{\ln(1+2x)}{1+2x} - \frac{x}{1+2x} \right)$$

$$= (1+2x) \left(\frac{\ln(1+2x)}{1+2x} - \frac{1}{\frac{1}{x}+2} \right) \text{ or } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1+2x = +\infty \text{ or}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x}{x} = 0 \text{ par croissance comparée donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+2x)}{1+2x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}+2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1+2x = +\infty$$

d'où par produit des limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

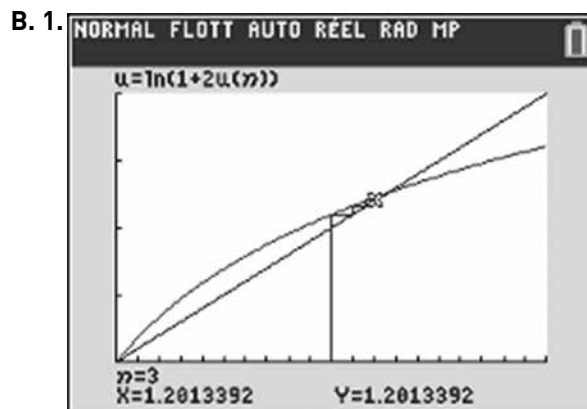
$$\text{b) } f'(x) = \frac{2}{1+2x} - 1 = \frac{1-2x}{1+2x}$$

Sur $]0; +\infty[$, $1+2x > 0$ le signe de $f'(x)$ ne dépend donc que du signe de $1-2x$.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-	-	-
Sens de variation de f	0	$\ln 2 - \frac{1}{2}$			$+\infty$

$$2. f(1) = \ln 3 - 1 > 0 \text{ et } f(2) = \ln 5 - 2 < 0.$$

Sur l'intervalle $[1; 2]$, la fonction f est strictement décroissante et continue, de plus $f(1) > 0$ et $f(2) < 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1; 2]$, à l'aide de la calculatrice on détermine $\alpha \approx 1,26$.



La suite (u_n) semble croissante et converger vers $\ell \approx 1,2$.

$$2. P(n) = \{n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2\}$$

Initialisation : $u_1 = g(u_0) = g(1) = \ln 3 > 1$ et $\ln 3 > 2$ donc $1 \leq u_0 \leq u_1 \leq 2$ d'où $P(0)$ est vérifiée.

Hérédité : on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est encore vraie.

La fonction g est strictement croissante sur

$$[0 ; +\infty[\text{ car } g'(x) = \frac{2}{1+2x} > 0.$$

$1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ d'après l'hypothèse de récurrence, or g est une fonction strictement croissante : $g(1) \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(2)$ or $g(1) = \ln 3 > 1$ et $g(2) = \ln 5 < 2$ d'où $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$ d'où $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : en vertu du principe de récurrence, $P(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Puisque $u_n \leq u_{n+1}$ cela signifie que la suite (u_n) est croissante ; de plus elle est majorée par 2 donc la suite est convergente.

Soit ℓ la limite de cette suite, on montre alors que ℓ est solution de l'équation $g(x) = x$.

$$g(x) = x \Leftrightarrow \ln(1+2x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0$$

D'après la partie A, cette équation admet une unique solution α sur $[1 ; 2]$; donc $\ell = \alpha \approx 1,26$.

80. A. 1. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\ln(x^2 + 1) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ donc par somme des limites on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

$$b) h'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$$

x	2	$+\infty$
Signe de $h'(x)$	+	
Sens de variation de h	3	$+\infty$
Signe de $h(x)$	+	

Sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$, $h(x) > 0$.

$$c) f(x) > x - \ln(x^3) \Leftrightarrow x - \ln(x^2 + 1) > x - \ln(x^3) \\ \Leftrightarrow \ln(x^3) - \ln(x^2 + 1) > 0$$

$$\text{Or } \ln(x^3) - \ln(x^2 + 1) = \ln\left(\frac{x^3}{x^2 + 1}\right) \text{ sur l'intervalle}$$

$I = [2 ; +\infty[$ cela revient alors à résoudre

$$\ln\left(\frac{x^3}{x^2 + 1}\right) > \ln(1) \Leftrightarrow \frac{x^3}{x^2 + 1} > 1 ; x \in I$$

$$\Leftrightarrow x^3 > x^2 + 1 ; x \in I \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 1 > 0 ; x \in I.$$

Or sur I , $h(x) > 0$, on peut donc en déduire que pour tout $x > 2$, $f(x) > x - \ln(x^3)$.

$$d) x - \ln(x^3) = x - 3\ln x = x \left(1 - \frac{3\ln x}{x}\right)$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ par croissance comparée donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3\ln x}{x} = 1 ; \text{ de plus } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ par produit}$$

$$\text{des limites on a } \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(x^3) = +\infty. f(x) > x - \ln(x^3)$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ par comparaison.}$$

2. $f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x^2 + 1} = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1} \geq 0$ la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
Sens de variation de f	$-\infty$	$+\infty$

$$3. f(x) = x \Leftrightarrow -\ln(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \\ \Leftrightarrow x = 0$$

B. 1. Soit $P(n) = \{0 \leq u_n \leq 1\}$.

Initialisation : $u_0 = 1$ donc $P(0)$ vraie.

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $P(k)$ est vraie et montrons que $P(k+1)$ est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence : $0 \leq u_k \leq 1$. Comme f est croissante sur $\mathbb{R}$, $f(0) \leq f(u_k) \leq f(1)$ or $f(0) = 0$; $f(1) = 1 - \ln(2) < 1$ donc $0 \leq u_{k+1} \leq 1$ donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : en vertu du principe de récurrence, l'hypothèse $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $H(n) = \{u_{n+1} \leq u_n\}$.

Initialisation : $u_1 = u_0 - \ln(u_0^2 + 1) = 1 - \ln(2) < 1$ donc $u_1 \leq u_0$.

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $H(k)$ est vraie et montrons que $H(k+1)$ est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence : $u_{k+1} \leq u_k$ or f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ donc $f(u_{k+1}) \leq f(u_k) \Leftrightarrow u_{k+2} \leq u_{k+1}$ donc $H(k+1)$ est vraie.

Conclusion : en vertu du principe de récurrence, l'hypothèse $H(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. La suite (u_n) est décroissante puisque $u_{n+1} \leq u_n$ et minorée par 0 donc la suite (u_n) est convergente. On montre que cette suite converge vers ℓ solution de l'équation $f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$ d'après la partie A, d'où $\ell = 0$.

4. Rôle de ce programme : déterminer le rang n à partir duquel les termes de la suite (u_n) deviennent strictement inférieurs à 0,01.

81. 1. a) $u_n = u_0 \times q^n = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

b) $v_n = \ln(u_n) = \ln\left(3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \ln 3 + n \ln\left(\frac{1}{4}\right)$
 $= \ln 3 - n \ln 4$

$v_{n+1} - v_n = \ln 3 - (n+1) \ln 4 - \ln 3 + n \ln 4 = -\ln 4$
 La suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\ln 4$.
 On pouvait aussi montrer que $v_n = an + b$ donc il s'agit d'une suite arithmétique de raison $r = a$.

2. a) $S_n = (n+1) \times \frac{v_0 + v_n}{2} = (n+1) \times \frac{\ln 3 + \ln 3 - n \ln 4}{2}$
 $= (n+1) \frac{2 \ln 3 - 2 \ln 2}{2} = (n+1)(\ln 3 - \ln 2)$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty$ et $\ln 3 - \ln 2 > 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

3. a) $e^{S_n} = e^{v_0 + v_1 + \dots + v_n} = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \dots \times e^{v_n}$
 $= u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n = P_n$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{S_n} = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = +\infty$.

82. 1. a) $v_{n+1} - v_n = \ln(u_{n+2}) - \ln(u_{n+1}) - \ln(u_{n+1}) + \ln(u_n)$
 $= \ln\left(\frac{u_{n+1}^2}{e \times u_n}\right) - 2 \ln(u_{n+1}) + \ln(u_n)$
 $= 2 \ln(u_{n+1}) - \ln e - \ln(u_n) - 2 \ln(u_{n+1}) + \ln(u_n) = -1$
 La suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = -1$.

$v_0 = \ln(u_1) - \ln(u_0) = 1$

b) $v_n = v_0 + n \times (-1) = 1 - n$

2. a) $S_n = n \times \frac{v_0 + v_{n-1}}{2} = n \times \frac{1 + 1 + (n-1)}{2} = \frac{n(3-n)}{2}$

b) Soit $P(n) = \{S_n = \ln(u_n) ; n \in \mathbb{N}^*\}$

Initialisation : $S_1 = v_0 = 1 = \frac{1 \times (3-1)}{2}$, donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $P(k)$ est vraie et montrons que $P(k+1)$ est vraie.

$S_{k+1} = S_k + v_k = \ln(u_k) + \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)$
 $= \ln(u_{k+1})$ donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : en vertu du principe de récurrence, l'hypothèse $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. a) D'après la question 2. on en déduit que

$\frac{n(3-n)}{2} = \ln(u_n) \Leftrightarrow u_n = e^{\frac{n(3-n)}{2}}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(3-n)}{2} = -\infty$ or $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

b)

```
N ← 0
U ← e $\frac{N(3-N)}{2}$ 

Tant que U ≥ 10-50
    N ← N + 1
    U ← e $\frac{N(3-N)}{2}$ 

Fin du Tant que
```

NORMAL FLOTT AUTO REEL RAD HP	NORMAL FLOTT AUTO REEL RAD HP
PrgrEXMAG	PROGRAM: EXMAG
17	:0→N
Fait	:e ^{$\frac{N(3-N)}{2}$} →U
	:While U≥10 ⁻⁵⁰
	:N+1→N
	:e ^{$\frac{N(3-N)}{2}$} →U
	:End
	:Disp N

c) $e^{\frac{n(3-n)}{2}} < 10^{-50} \Leftrightarrow \frac{n(3-n)}{2} < \ln(10^{-50})$
 $\Leftrightarrow -n^2 + 3n + 100 \ln 10 < 0$

$\Delta = 9 + 400 \ln 10$

$n_1 = \frac{3 + \sqrt{9 + 400 \ln 10}}{2} \approx 16,7$

$n_2 = \frac{3 - \sqrt{9 + 400 \ln 10}}{2} \approx -13,7$

x	0	n_1	$+\infty$
signe de $-x^2 + x + 100 \ln 10$	+	0	-

Donc $e^{\frac{n(3-n)}{2}} < 10^{-50}$ à partir de $n = 17$.

83. 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ et $\frac{x}{x+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$ or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$

$\lim_{X \rightarrow 1} \ln X = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$ ainsi par somme

des limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2. $f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} + \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{-1}{(1+x)^2} + \frac{1}{x(x+1)}$
 $= \frac{-x + (x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2}$

3. a) Pour tout $x \in [1 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$.

b) $f(1) = \frac{1}{2} - \ln 2 < 0$; sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$, la fonction f est strictement croissante et continue, de plus pour tout $x \in [1 ; +\infty[$; $f(x) \in \left[\frac{1}{2} - \ln 2 ; 0 \right]$ donc la fonction f est strictement négative sur $[1 ; +\infty[$.

B. 1. Ce programme calcule la valeur de $U_N + \ln N$.

Pour $N = 3$ on aura : $u_3 + \ln 3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$.

```

2. N ← valeur saisie
   U = 0
   Pour i variant de 1 à N
       U = U +  $\frac{1}{i}$ 
   Fin Pour
   U ← U -  $\ln N$ 
   Afficher U
    
```

3. La suite semble décroissante.

	A	B
1	n	un
2	1	1
3	2	0,8068528194
4	3	0,7347210447
5	4	0,6970389722
6	5	0,6738954209
7	6	0,6582405308
8	7	0,6469469938
9	8	0,6384156012
10	9	0,6317436766
11	10	0,626383161
12	11	0,6219820721
13	12	0,6183040284
14	13	0,6151843977
15	14	0,6125049969
16	15	0,6101787921
17	16	0,608140271
18	17	0,6063391786
19	18	0,6047363203
20	19	0,603300678
21	20	0,6020073836
22	21	0,600836267
23	22	0,5997707969
24	23	0,5987972952
25	24	0,5979043474
26	25	0,5970823529
27	26	0,5963231782
28	27	0,5956198872
29	28	0,5949665288
30	29	0,5943579676

$$\begin{aligned}
 4. \quad u_{n+1} - u_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - 1 \\
 &\quad - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} + \ln n \\
 &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = f(n)
 \end{aligned}$$

Puisque f est négative sur $[1 ; +\infty[$ alors

$u_{n+1} - u_n < 0 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$: la suite (u_n) est donc décroissante.

$$84. \quad 1. \quad \frac{3x+1}{x+1} = \frac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{3+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} \quad \text{or} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 3$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right) = \ln 3$. Cela signifie que $\mathcal{C}_f$

admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = \ln 3$.

$$2. \quad a) \quad f'(x) = \frac{\frac{3(x+1) - (3x+1)}{(x+1)^2}}{\frac{3x+1}{x+1}} = \frac{2}{(x+1)(3x+1)}$$

b) Pour tout $x \in [0 ; +\infty[$ on a $x+1 > 0$ et $3x+1 > 0$ donc $f'(x) > 0$, la fonction f est donc strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

B. 1. Soit $P(n) = \left\{ \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \right\}$.

Initialisation : $u_1 = f(u_0) = f(3) = \ln\left(\frac{5}{2}\right) < 3$ et

$\ln\left(\frac{5}{2}\right) > \frac{1}{2}$ par conséquent $\frac{1}{2} \leq u_1 \leq u_0$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : d'après l'hypothèse de récurrence

$\frac{1}{2} \leq u_{k+1} \leq u_k$, puisque f est une fonction strictement croissante on a alors : $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_{k+1}) \leq f(u_k)$

soit $\frac{1}{2} < \ln\left(\frac{5}{3}\right) \leq u_{k+2} \leq u_{k+1}$ donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : en vertu du principe de récurrence, l'hypothèse $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Puisque $u_{n+1} \leq u_n$ la suite est alors décroissante et minorée par 0,5 ; la suite est donc convergente vers $\ell \geq 0,5 > 0$.

85. A. 1. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$

Pour tout $x \in [0 ; +\infty[$ on a $x > 0$ et $x+1 > 0$ donc $f'(x) > 0$; la fonction f est donc strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

2. $f(0) = 0$; puisque la fonction est croissante sur $[0 ; +\infty[$ alors $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \ln(x+1)$.

B. 1. a) $P(n) = \{u_n \geq 0\}$

Initialisation : $u_0 = 1 > 0$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $P(k)$ est vraie et montrons que $P(k+1)$ est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence :

$u_k \geq 0$ donc $f(u_k) \geq f(0)$ car f est croissante.

Soit $u_{k+1} \geq 0$, donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : en vertu du principe de récurrence, l'hypothèse $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) $u_{n+1} - u_n = -\ln(1 + u_n)$ or $u_n \geq 0$ donc $1 + u_n \geq 1$ d'où $\ln(1 + u_n) \geq 0$ ainsi $u_{n+1} - u_n < 0$ la suite (u_n) est donc décroissante.

On en déduit $u_n \leq u_0$ soit $u_n \leq 1$.

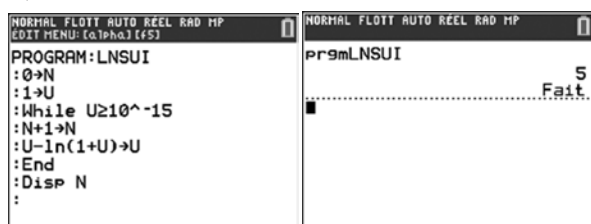
c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 ; elle est donc convergente.

2. $f(x) = x \Leftrightarrow -\ln(1+x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$; d'où $\ell = 0$.

3. a)

```
P ← valeur saisie
N ← 0
U ← 1
Tant que U ≥ 10-p
    N ← N + 1
    U ← U - ln(1 + U)
Fin du Tant que
Afficher N
```

b)



À partir du rang $n = 5$, tous les termes de la suite seront inférieurs à 10^{-15} .

Modélisations

86. 1. Puisque $u_{n+1} = u_n \times 1,5$ cela signifie que la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1,5$ et de 1^{er} terme $u_0 = 10\,000$.

2. $u_n = u_0 \times q^n = 10\,000 \times 1,5^n$

3. $10\,000 \times 1,5^n > 1\,000\,000 \Leftrightarrow 1,5^n > 100$

$$\Leftrightarrow n \ln 1,5 > \ln 100 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 100}{\ln 1,5}$$

Soit $n \geq 12$; ce qui signifie qu'au bout de 12h, le nombre de bactéries aura dépassé le million.

87. Soit A l'événement : « obtenir au moins une boule blanche », on a alors $\bar{A}$: « n'obtenir aucune boule blanche ».

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$\text{On veut } P(A) \geq 0,999 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0,999$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0,001 \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq \ln(0,001)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,001)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}$$

soit $n \geq 38$; cela signifie qu'il faut effectuer au moins 38 tirages afin que la probabilité d'obtenir au moins 1 boule blanche soit supérieure à 0,999.

88. Soit C_n le capital obtenu au bout de la n -ième année, on a $C_0 = 2\,500$ et $C_n = C_0 \times 1,0175^n$. La suite (C_n) est géométrique de raison $q = 1 + \frac{1,75}{100} = 1,0175$

car pour passer du capital d'une année à l'autre on augmente ce dernier de 1,75 %.

On veut déterminer n tel que

$$C_n \geq 5\,000 \Leftrightarrow 2\,500 \times 1,0175^n \geq 5\,000$$

$$\Leftrightarrow 1,0175^n \geq 2 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1,0175}$$

soit $n \geq 40$. Il faudra donc attendre 40 ans pour doubler le capital.

89. 1. $u_{n+1} = u_n \times 1,02$ il s'agit donc d'une suite géométrique de raison 1,02 et de 1^{er} terme 1 200.

2. On veut déterminer n tel que $u_n \geq 3\,600 \Leftrightarrow 1\,200 \times 1,02^n \geq 3\,600 \Leftrightarrow 1,02^n \geq 3 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 3}{\ln 1,02}$ soit $n \geq 56$.

Au bout de 56 ans, le capital aura triplé.

90. A. 1. $h(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$

$$h'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{(1-x)(1+x) - 1}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x}$$

Pour tout $x \geq 0$ on a $1+x > 0$ et $-x^2 \leq 0$ donc $h'(x) \leq 0$: la fonction h est donc strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ d'où pour tout $x \geq 0$: $h(x) \leq h(0)$.

Soit $h(x) \leq 0 \Leftrightarrow x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$.

$g(x) = x - \ln(1+x)$; $g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$; pour

tout $x \geq 0$: $g'(x) \geq 0$. La fonction g est donc croissante sur $[0; +\infty[$ soit $g(x) \geq g(0)$ d'où $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \ln(1+x)$.

On en déduit : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

2. On a $C_n = C \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n$ on veut

$$C_n \geq 3C \Leftrightarrow C \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n \geq 3C$$

$$\Leftrightarrow n \ln\left(1 + \frac{t}{100}\right) \geq \ln 3 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 3}{\ln\left(1 + \frac{t}{100}\right)}$$

or pour de petites valeurs de t on peut considérer

$$\ln\left(1 + \frac{t}{100}\right) \approx \frac{t}{100} \text{ d'où } n \geq \frac{\ln 3}{\frac{t}{100}} \text{ soit } n \geq \frac{100 \ln 3}{t} \text{ soit}$$

environ $n \geq \frac{110}{t}$.

B. 1. Placement en composition annuelle, au bout d'un an : $1\,500 \times 1,05 = 1\,575$.

Placement en composition mensuelle, au bout

$$\text{d'un an : } 1500 \times \left(1 + \frac{\frac{5}{12}}{100}\right)^{12} \approx 1576,74.$$

Le 2^e placement est meilleur avec ces conditions initiales.

2. a) $C \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)^m = C \times \left(1 + \frac{\frac{t}{100}}{m}\right)^m$ puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \text{ alors } \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\frac{t}{100}}{m}\right)^m = e^{\frac{t}{100}} \text{ ainsi}$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} C \times \left(1 + \frac{\frac{t}{100}}{m}\right)^m = C e^{\frac{t}{100}}$$

b) On veut déterminer t tel que

$$C e^{\frac{t}{100}} = 2C \Leftrightarrow e^{\frac{t}{100}} = 2 \Leftrightarrow \frac{t}{100} = \ln 2$$

$$\Leftrightarrow t = 100 \ln 2.$$

Il faudrait un pourcentage d'environ 69,31 %.

91. 1. $5\,730 = -k \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow k = \frac{5\,730}{\ln 2} \approx 8\,267$

2. a) $A(x) = -8\,267 \ln 0,25 \approx 11\,460$

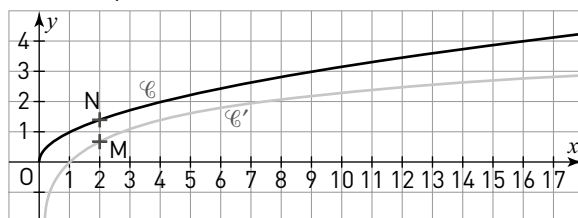
l'âge de cette coquille est d'environ 11 460 ans.

b) $2\,183 = -8\,267 \ln x \Leftrightarrow \ln x = -\frac{2\,183}{8\,267}$

$$\Leftrightarrow x = e^{-\frac{2\,183}{8\,267}} \approx 0,78$$

La proportion de carbine 14 est d'environ 0,78.

92. Groupe 1 :



La limite de MN semble être $+\infty$.

Groupe 2 :

	A	B	C	D
1	x	y_M	y_N	MN
2	1	0	1	1
3	100	4,605170186	10	5,394829814
4	199	5,293304825	14,10673598	8,813431155
5	298	5,697093487	17,2626765	11,56558302
6	397	5,983936281	19,92485885	13,94092256
7	496	6,206575927	22,27105745	16,06448152
8	595	6,388561406	24,39262184	18,00406043
9	694	6,542471961	26,34387974	19,80140778
10	793	6,675823222	28,16025568	21,48443246
11	892	6,793466133	29,86636905	23,07290291
12	991	6,898714534	31,48015248	24,58143794
13	1090	6,993932975	33,01514804	26,02121506
14	1189	7,080867897	34,4818793	27,4010114
15	1288	7,160845907	35,88871689	28,72787098
16	1387	7,23489842	37,2424489	30,00755048
17	1486	7,303843225	38,54867053	31,24482731
18	1585	7,368339686	39,81205847	32,44371879
19	1684	7,428927195	41,03656906	33,60764186
20	1783	7,486052618	42,22558466	34,73953204
21	1882	7,54009032	43,38202393	35,84193361
22	1981	7,591357047	44,50842617	36,91706912
23	2080	7,640123173	45,607017	37,96689383
24	2179	7,686621335	46,67976007	38,99313873
25	2278	7,731053144	47,72839826	39,99734511
26	2377	7,773594467	48,75448697	40,98089251
27	2476	7,814399634	49,75942122	41,94502158
28	2575	7,853604813	50,74445783	42,89085301
29	2674	7,891330758	51,7107339	43,81940314
30	2773	7,927685046	52,65928218	44,73159714

La limite semble être $+\infty$.

Groupe 3 :

```

N ← 1
D ← √N - ln N
Pour i variant de 1 à 107
    N ← N + 1
    D ← √N - ln N
Fin Pour
Afficher N
    
```

Sur Python :

```

from math import *
N = 1
D = sqrt(N) - log(N)
for i in range(1,10**7):
    N = N+1
    D = sqrt(N) - log(N)
print (D)
    
```

On obtient alors sur la console :

```

>>>
3146.159564517421
    
```

La limite semble effectivement être $+\infty$.

Groupe 4 :

$$\begin{aligned}\sqrt{x} - \ln x &= \sqrt{x} \left(1 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right) = \sqrt{x} \left(1 - \frac{\ln((\sqrt{x})^2)}{\sqrt{x}} \right) \\ &= \sqrt{x} \left(1 - \frac{2\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right)\end{aligned}$$

or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par croissance com-

parée d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 0$ ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 1$

d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(1 - \frac{2\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right) = +\infty$ par produit des limites.

Exercices bilan

p. 192

93. Calcul d'aire et étude de $\ln$

1. Soit g la fonction associée à l'aire du rectangle

$$\text{OPMQ. } g(x) = x \times f_g(x) = ax - x \ln \left(\frac{x}{a} \right)$$

$$g'(x) = a - \ln \left(\frac{x}{a} \right) - x \times \frac{1}{\frac{x}{a}} = a - \ln \left(\frac{x}{a} \right) - 1$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln \left(\frac{x}{a} \right) < a - 1 \Leftrightarrow \frac{x}{a} < e^{a-1}; x < 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < ae^{a-1}$$

x	0	ae^{a-1}	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	+	0	-
Sens de variation de g	$-\infty \nearrow g'(ae^{a-1}) \searrow -\infty$		

$$g(ae^{a-1}) = ae^{a-1}$$

$$M(ae^{a-1}; ae^{a-1})$$

2. Il s'agit de résoudre $ae^{a-1} = a \Leftrightarrow e^{a-1} = 1$

$$\Leftrightarrow a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

Il existe une seule valeur : $a = 1$.

94. Avec une fonction auxiliaire

A. 1. $v : x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante

sur $]0; +\infty[$; de plus $w : x \mapsto x - 3$ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$, par conséquent la

fonction u est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ comme somme de fonctions croissantes sur cet intervalle.

2. $u(2) = \ln 2 - 1 < 0$ et $u(3) = \ln 3 > 0$; par conséquent la fonction u est strictement croissante et continue sur $]0 ; +\infty[$, de plus $u(2) < 0$ et $u(3) > 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α .

3.

x	0	α	$+\infty$
Sens de variation de u	$-\infty$	$\xrightarrow{\quad}$	$+\infty$
Signe de u	-	0	+

B. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) - 2 = -\infty$ par produit des limites on a alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

$$2. a) f'(x) = \frac{1}{x^2}(\ln x - 2) + 1 - \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} = \frac{\ln x - 2 + x}{x^2} = \frac{\ln x + x - 3}{x^2} = \frac{u(x)}{x^2}$$

b) Pour tout $x \in]0 ; +\infty[: x^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $u(x)$.

La fonction f est donc décroissante sur $]0 ; \alpha[$ et croissante sur $]\alpha ; +\infty[$.

$$C. 1. f(x) - \ln x = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) + 2 - \ln x = -\frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2 - \ln x}{x}$$

$$2. 2 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 2 \Leftrightarrow x < e^2$$

Donc sur l'intervalle $]0 ; e^2[: f(x) - \ln x > 0$ ce qui signifie que C est au-dessus de C' et sur l'intervalle $]e^2 ; +\infty[: f(x) - \ln x < 0$ donc la courbe C est en dessous de C' .

95. Limite et taux d'accroissement

$$1. D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3 > 0\}$$

$$=]-\infty ; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3} ; +\infty[= D_f'$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 3}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) \text{ car } f(2) = 0 ; \text{ or}$$

$$f'(2) = 4 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2} = 4.$$

Il s'agit de résoudre l'équation

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 - 3} = 1 \Leftrightarrow 2x = x^2 - 3 ; x \in D_f$$

il s'agit de résoudre $x^2 - 2x - 3 = 0$

$$\Delta = 16 ; x_1 = -1 \text{ et } x_2 = 3.$$

Il existe donc deux tangentes à $\mathcal{C}_f$ parallèles à la droite d'équation $y = x + 5$ aux points d'abscisse -1 et 3 .

96. Modélisation

$$A. 1. f'(x) = \ln(x+1) + (x+1) \times \frac{1}{x+1} - 3 = \ln(x+1) + 1 - 3 = \ln(x+1) - 2$$

$$2. \ln(x+1) - 2 > 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) > 2 \Leftrightarrow x+1 > e^2 \Leftrightarrow x > e^2 - 1$$

x	0	$e^2 - 1$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Sens de variation de f	$0 \searrow$	$10 - e^2$	$\nearrow 21 \ln 21 - 53$

$$3. f'(0) = -2$$

B.

```
from math import*
def f(x):
    y = (x+1)*log(x+1) - 3*x+7
    return y
s = 0
for k in range (20):
    s = s + sqrt(1+(f(k+1)-f(k))**2)*10
print (s)
```

La console affiche :

```
>>>
245.20431466337828
```

97. $\ln u$ et tangente

$$1. f(2) = 2 \ln 1 - 2 + 2 = 0 \text{ d'où } l(2 ; f(2)) \text{ donc } l \in \mathcal{C}_f.$$

$$f(2e) = 2e \ln \left(\frac{2e}{2} \right) - 2e + 2 = 2e \ln e - 2e + 2 = 2$$

d'où $B(2e ; f(2e))$ donc $B \in \mathcal{C}_f$.

$$f'(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right) + x \times \frac{1}{\frac{x}{2}} - 1 = \ln\left(\frac{x}{2}\right) + 1 - 1$$

$$= \ln \frac{x}{2}$$

Or $f'(2) = \ln\left(\frac{2}{2}\right) = 0$ ce qui signifie que la tangente

à $\mathcal{C}_f$ en 1 est horizontale autrement dit parallèle à l'axe des abscisses.

2. $T_{2e} : y = f'(2e)(x - 2e) + f(2e)$

$$f'(2e) = \ln\left(\frac{2e}{2}\right) = \ln e = 1 \text{ d'où } y = (x - 2e) + 2 \text{ soit}$$

$$y = x - 2e + 2.$$

3. Il s'agit de résoudre l'équation $x - 2e + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2e - 2$. Le point D a pour coordonnées $(2e - 2 ; 0)$.

98. Position relative et croissance comparée

$$1. f'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x-2}{(x-1)^2}$$

pour tout $x \in]1 ; +\infty[$ et $(x-1)^2 > 0$: le signe de $f'(x)$ ne dépend donc que du signe de $x-2$.

x	1	2	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Sens de variation de f	$+\infty \swarrow \quad \searrow \quad \nearrow \quad \nearrow \quad +\infty$ $\quad \quad \quad 1 \quad \quad \quad$		

$$f(x) = \frac{1}{x-1} [1 + (x-1)\ln(x-1)]$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0 \text{ et } \lim_{X \rightarrow 0} X \ln X = 0$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)\ln(x-1) = 0$$

$$\text{ainsi } \lim_{x \rightarrow 1} 1 + (x-1)\ln(x-1) = 1$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = +\infty \text{ donc par produit des limites}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-1) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} = 0 \text{ donc par somme}$$

$$\text{des limites } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

2. a) $f(x) - 1 = \ln(x-1) + \frac{1}{x-1} - 1 \geq 0$ car d'après le tableau de variations, f admet un minimum

valant 1 ; par conséquent la courbe $\mathcal{C}_f$ est toujours au-dessus de la droite d'équation $y = 1$.

b) Il s'agit d'étudier le signe de

$$f(x) - g(x) = \ln(x-1) + \frac{1}{x-1} - (\ln(x-1))^2 - \frac{3-2x}{x-1}$$

$$= \ln(x-1) - (\ln(x-1))^2 + 2$$

On pose $X = \ln(x-1)$.

Il s'agit alors d'étudier le signe de : $-X^2 + X + 2$.

$$\Delta = 9 ; X_1 = 2 \text{ et } X_2 = -1$$

$$\text{soit } \ln(x-1) = 2 \Leftrightarrow x-1 = e^2 \Leftrightarrow x = e^2 + 1$$

$$\text{et } \ln(x-1) = -1 \Leftrightarrow x-1 = \frac{1}{e} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} + 1.$$

x	1	$\frac{1}{e} + 1$	$e^2 + 1$	$+\infty$
Signe de $f(x) - g(x)$	-	0	+	-

Par conséquent la courbe $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$ sur les intervalles

$\left[1; \frac{1}{e} + 1\right]$ et sur $]e^2 + 1; +\infty[$ et $\mathcal{C}_f$ est strictement en

dessous de $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle $\left]\frac{1}{e} + 1; e^2 + 1\right[$.

Préparer le BAC Je me teste

p.194

99. c

100. c

101. c

102. d

103. B

104. d

105. c

Préparer le BAC Je révise

p. 195

106. Retrouver l'expression de la fonction

$$1. A(0 ; 1) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$$

Graphiquement on voit que $f'(0) = -1$ or

$$f'(x) = 2ax + b - \frac{1}{x+1}$$

$$\text{d'où } f'(0) = -1 \Leftrightarrow b - 1 = -1 \Leftrightarrow b = 0 ;$$

$$f'(1) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2a - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = 1$$

$$\text{d'où } f(x) = x^2 + 1 - \ln(x+1).$$

$$2. f'(x) = 2x - \frac{1}{x+1} = \frac{2x^2 + 2x - 1}{x+1} \text{ sur }]-1; +\infty[\text{ et}$$

$x+1 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $2x^2 + 2x - 1$.

x	-1	$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Sens de variation de f	$+\infty \swarrow \quad \searrow \quad \nearrow +\infty$ $f\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) \approx 1,82$		

$\lim_{x \rightarrow -1} x+1 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -1} -\ln(x) = +\infty$, de plus $\lim_{x \rightarrow -1} x^2 + 1 = 2$ donc par somme des limites on a $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$.

$$f(x) = x^2 - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x^2} + 1 \text{ pour}$$

$$x \neq 0; f(x) = x^2 \left(1 - \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} \times \frac{(x+1)^2}{x^2} \right) + 1; \text{ or}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ par croissance comparée

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et donc par produit des limites on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. Cela revient à résoudre $f'(x) \times f'(0) = -1$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{1}{x+1} \times (-1) = -1 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 2 = 0 \text{ avec}$$

$x \in]-1; +\infty[\Leftrightarrow x = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$, il existe donc une tangente à $\mathcal{C}_f$ perpendiculaire à T_0 .

$$4. f(x) - g(x) = -4 - \ln(x+1) < 0$$

$\Leftrightarrow x \in]e^{-4} - 1; +\infty[$ donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $]e^{-4} - 1; +\infty[$ et au-dessus sur $]-1; e^{-4} - 1[$.
 $f(x) - h(x) = -\ln(x+1) + \ln(x^2 + 6x + 5) > 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 5x + 4}{x+1} > 0$ avec $x \in]-1; +\infty[$ ce qui est toujours le cas sur $]-1; +\infty[$ par conséquent la courbe $\mathcal{C}_f$ est toujours au-dessus de $\mathcal{C}_h$ sur $]-1; +\infty[$.

$h(x) - g(x) = -4 - \ln(x^2 + 6x + 5) < 0$ avec $x \in]-1; +\infty[$
 $\Leftrightarrow x \in]-1; -3 + \sqrt{4 + e^{-4}}[$ donc la courbe $\mathcal{C}_h$ est en dessous de la courbe $\mathcal{C}_g$ sur $]-1; -3 + \sqrt{4 + e^{-4}}[$ et au-dessus sur $]-3 + \sqrt{4 + e^{-4}}; +\infty[$.

107. Avec une fonction auxiliaire

$$1. a) \lim_{x \rightarrow 0} 5x^2 - 2 + 2\ln x = -\infty$$

et $\lim_{x \rightarrow 0} 2x^2 = 0^+$ donc par quotient de limites on a $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$.

$$g(x) = \frac{x^2 - 5 - \frac{2}{x^2} + \frac{2\ln x}{x^2}}{2x^2} = \frac{5 - \frac{2}{x^2} + \frac{2\ln x}{x^2}}{2}$$

or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ par croissance comparée et par

$$\text{somme des limites } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - \frac{2}{x^2} + \frac{2\ln x}{x^2}}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\text{soit } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{5}{2}.$$

$$b) g'(x) = \frac{10x + \frac{2}{x} (2x^2) - (5x^2 - 2 + 2\ln x) \times 4x}{4x^4} = \frac{3 - 2\ln x}{x^3}$$

x	0	$\alpha(\sqrt{e})^3$	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	+	0	-
Sens de variation de g	$-\infty$	$\frac{5e^3 + 1}{2e^3}$	$\frac{5}{2}$
Signe de $g'(x)$	-	0	+

c) Sur l'intervalle $]0,5; 1[$, g est une fonction continue, strictement croissante telle que $g(0,5) < 0$ et $g(1) > 0$, donc d'après le T.V.I. l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0,5; 1[$. Sur $]0; 0,5[$, la fonction g est négative donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution.

Sur $]1; +\infty[$ la fonction g est positive donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution.

d) Voir tableau.

2. a) $\lim_{x \rightarrow 0} 5x^2 - 2\ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0^+$ donc par quotient de limites $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

$$f(x) = \frac{x^2 \left(5 - \frac{2\ln x}{x^2} \right)}{2x} = \frac{x \left(5 - \frac{2\ln x}{x^2} \right)}{2} \text{ or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \text{ par}$$

croissance comparée donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(5 - \frac{2\ln x}{x^2} \right)}{2} = +\infty$

par produit et quotient des limites, soit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$b) f'(x) = \frac{10x - \frac{2}{x} \times 2x - (5x^2 - 2\ln x) \times 2}{4x^2} = \frac{g(x)}{2x^2}$$

Le signe de $f'(x)$ est donc du signe de $g(x)$.

x	0	α	$+\infty$
Signe de $f'(x)$ = signe de g	+	0	-
Sens de variation de f	$+\infty \swarrow \searrow +\infty$ $\quad \quad \quad f(\alpha)$		

c) D'après le tableau de variations, on déduit que f admet un minimum en α valant $f(\alpha) = \frac{5\alpha^2 - 2\ln\alpha}{2\alpha}$

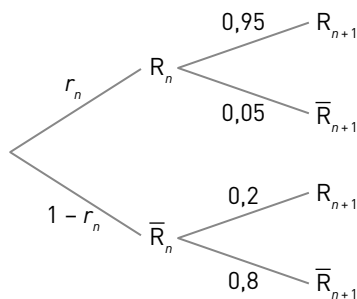
or on a $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\ln\alpha = 2 - 5\alpha^2$ d'où

$$f(\alpha) = \frac{5\alpha^2 - 2 + 5\alpha^2}{2\alpha} = \frac{5\alpha^2 - 1}{\alpha}.$$

d) $\alpha > 0,5$ donc $5\alpha^2 - 1 > 0$ d'où $\frac{5\alpha^2 - 1}{\alpha} > 0$, le minimum de f étant positif, f est donc toujours positive sur $]0; +\infty[$.

108. Probabilités et ln

1.



$P(R_{n+1}) = r_{n+1} = 0,95r_n + 0,2(1 - r_n)$ d'après la loi des probabilités totale, d'où $r_{n+1} = 0,75r_n + 0,2$.

2. Soit (H_n) l'hypothèse de récurrence :

$$\{r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8\}.$$

Initialisation : $r_1 = 0,9$ or $0,1 \times 0,75^0 + 0,8 = 0,9$

L'hypothèse est donc bien vérifiée pour $n = 1$.

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier k tel que (H_k) est vraie et montrons que (H_{k+1}) est encore vraie.

$$r_{k+1} = 0,75r_k + 0,2$$

$$= 0,75 \times (0,1 \times 0,75^{k-1} + 0,8) + 0,2$$

$$r_{k+1} = 0,1 \times 0,75^k + 0,8$$

(H_{k+1}) est donc vraie.

Conclusion : en vertu du principe de récurrence on a donc bien $r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$.

3. a)

```

R ← 0,9
N ← 1
Tant que R > 0,800 01
    N ← N + 1
    R ← 0,75 * R + 0,2
Fin du Tant que
    
```

$$b) 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8 \leq 0,80001$$

$$\Leftrightarrow 0,7^{n-1} \leq 0,0001$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,0001)}{\ln(0,7)} + 1 \text{ donc c'est vérifié à partir de}$$

$$n = 27.$$

109. ln(u), limites et variations

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{x^2} > 0$ et $e^{-\frac{1}{x}} > 0$ donc $g(x) > 0$

d'où $\ln(g(x))$ est toujours bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

$$2. h(x) = \ln \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$$

$$= \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) + \ln\left(e^{-\frac{1}{x}}\right) = -2\ln x - \frac{1}{x} = \frac{-2x\ln x - 1}{x}$$

3. a) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ par croissance comparée donc

$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -\infty$ par somme et quotient de limites.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(g(x)) = -\infty$ or $\lim_{X \rightarrow 0} \ln(X) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

Exercices vers le supérieur p. 196-197

110. Relation fonctionnelle

1. Si la fonction était définie en 0, on aurait :

$$f(0) = f(0 \times 0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$$

et donc nécessairement $f(0) = 0$.

Or $f(a) + f(0) = f(a)$ si $f(0) = 0$, par ailleurs d'après la définition de f :

$f(a) + f(0) = f(a \times 0) = f(0) = 0$, ce qui serait donc contradictoire avec le fait que la fonction f soit non nulle.

Une telle fonction n'est donc pas définie en 0.

2. $f(1) = f(1 \times 1) = 2f(1)$ d'où $f(1) = 0$.

3. $f\left(y \times \frac{x}{y}\right) = f(x)$ et $f\left(y \times \frac{x}{y}\right) = f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right)$; donc

$$f(x) = f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y).$$

$$\begin{aligned} 4. a) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{f\left(\frac{x+h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} = \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \\ &= \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right) - f(1)}{\frac{h}{x} \times x} \quad \text{car } f(1) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right) - f(1)}{\frac{h}{x} \times x} \\ &= \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right) - f(1)}{\frac{h}{x}} \times \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right) - f(1)}{\frac{h}{x}} \times \frac{1}{x} \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right) - f(1)}{\frac{h}{x}} \right) \times \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\text{Or } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right) - f(1)}{\frac{h}{x}} = f'(1) \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \text{ puisque } f'(1) = 1.$$

5. Puisque $x \in]0; +\infty[$ et $\frac{1}{x} > 0$ donc $f'(x) > 0$ d'où la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Puisque $f(1) = 0$ et que la fonction f est croissante, on en déduit que la fonction f est strictement négative sur $]0; 1[$ et strictement positive sur $]1; +\infty[$.

 111. Les fonctions $x \mapsto x^\alpha$

1. $f_0(x) = x^0 = 1$, f_0 est donc la fonction constante égale à 1.

$f_1(x) = x^1 = x$, f_1 est la fonction linéaire $f(x) = x$.

2. Puisque $f_\alpha(x) = e^{\alpha \ln x}$, la fonction f_α est alors dérivable comme composée de fonctions dérivables avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = \alpha \ln x$.

$f(x) = u(v(x))$ donc $f'(x) = u'(v(x)) \times v'(x)$

$$= e^{\alpha \ln x} \times \left(\alpha \times \frac{1}{x} \right) = \frac{\alpha}{x} x = \alpha x^{\alpha-1}.$$

3. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha \ln x = +\infty$ si $\alpha < 0$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f_\alpha(x) = +\infty$.

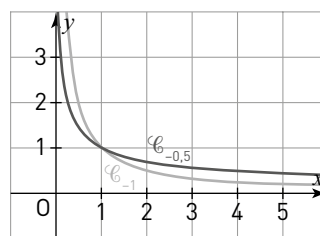
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha \ln x = -\infty$ car $\alpha < 0$, or $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ d'où

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = 0$.

b) Puisque $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ alors $f'_\alpha(x) < 0$ puisque $\alpha < 0$ et $x > 0$; la fonction f_α est donc strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
Sens de variation de f_α	$+\infty$	0

c)



4. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha \ln x = -\infty$ si $\alpha > 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc

$\lim_{x \rightarrow 0} f_\alpha(x) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha \ln x = +\infty \text{ car } \alpha > 0, \text{ or } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = +\infty.$$

b) Puisque $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ alors $f'_\alpha(x) > 0$ puisque $\alpha > 0$ et $x > 0$; la fonction f_α est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
Sens de variation de f_α	0	$+\infty$

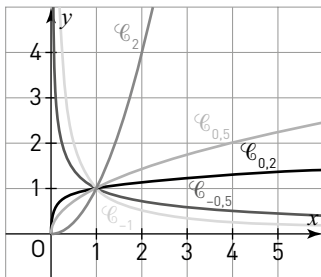
c) $\lim_{x \rightarrow 0} h_\alpha(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f_\alpha(x) = 0$ et $h_\alpha(0) = 0$, la fonction h_α est donc continue en 0.

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h_\alpha(x) - h_\alpha(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1}$$

• si $0 < \alpha < 1$: $\alpha - 1 < 0$ il s'agit du cas de figure illustré en 3. donc $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} = +\infty$, la fonction h_α ne serait donc pas dérivable en 0 pour $0 < \alpha < 1$.

• si $\alpha > 1$: $\alpha - 1 > 0$, il s'agit du cas de figure illustré en 4. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} = 0$; par conséquent la fonction h_α serait dérivable en 0 et $h'_\alpha(0) = 0$.

e)



112. Une autre approche de e^x

1. Si $a > 0$; $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n > 0$ donc $\ln(u_n)$ défini.

Si $a < 0$; $-a > 0$, puisque $n > -a > 0$ alors $\frac{1}{n} < -\frac{1}{a}$; $\frac{a}{n} > -1$ car $a < 0$ donc $1 + \frac{a}{n} > 0$ et

$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n > 0$ donc $\ln(u_n)$ est défini. Finalement, quelque soit $a \in \mathbb{R}$, la suite $(\ln(u_n))$ est bien définie.

$$\text{2. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} a \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)}{\frac{a}{n}} \text{ or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{n} = 0 \text{ et } \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} a \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)}{\frac{a}{n}} = a.$$

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = a$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\ln(u_n)} = e^a$ ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

113. Logarithme décimal et grands nombres

$$\text{A. 1. A) } \log(10^n) = \frac{\ln 10^n}{\ln 10} = \frac{n \ln 10}{\ln 10} = n$$

$$\text{b) } \log(x^n) = \frac{\ln(x^n)}{\ln 10} = \frac{n \ln(x)}{\ln 10} = n \log(x).$$

$$\text{2. } (\log x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln 10}\right)' = \frac{1}{\ln 10} \times \frac{1}{x} > 0$$

La fonction $\log$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln 10} = -\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln 10} = +\infty.$$

x	0	$+\infty$
Sens de variation de $\log$	$-\infty$	$+\infty$

3. a) N est alors constitué de $n + 1$ chiffres.

$$\text{b) } \log(10^n) \leq \log(N) \leq \log(10^{n+1})$$

soit $n \leq \log(N) \leq n + 1$ d'où $E(\log(N)) = n$.

Ainsi N est constitué de $E(\log(N)) + 1$ chiffres.

B. Le nombre de chiffres de $2^{82\,589\,933}$ correspond à $E(\log(2^{82\,589\,933})) = E(82\,589\,933 \log 2) = 24\,662\,047$, qui correspond alors au nombre de chiffres du 51^e nombre de Mersenne.

114. Vrai ou faux ?

a) Vrai $D_f = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} - \sin(3x) > 0\}$

or $1 - \sin(3x) > 0 \Leftrightarrow \sin(3x) < 1$ or pour tout $X \in \mathbb{R}$: $\sin X \leq 1$ il suffit de résoudre $\sin(3x) \neq 1$.

$$\sin(3x) = 1 \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{d'où } D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\text{b) Faux } f'(x) = \frac{[1 - \sin(3x)]'}{1 - \sin(3x)} = \frac{-3\cos(3x)}{1 - \sin(3x)}$$

c) Faux il y a une infinité d'asymptotes verticales donc pas de limite en $+\infty$ pour la fonction f .

$$\text{d) Vrai } f(x) = -\ln 2 \Leftrightarrow \ln(1 - \sin(3x)) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin(3x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(3x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 3x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}; x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$ sur un intervalle d'amplitude 2π , cette équation admet donc 6 solutions (3 de chaque solution type).

115. Logique ?

Le raisonnement est faux car l'expression $3 + x$ s'annule en -3 , valeur interdite de $\frac{15 + 2x - x^2}{x^2 + 10x + 21}$; par conséquent $D_f =]-7; -3[\cup]-3; 5[$.

116. Étude d'une fonction

1. a) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x = 0$ par croissance comparée et $\lim_{x \rightarrow 0} 1 + x^2 = 1$ donc par somme de limites $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$.

$$g(x) = x^2(1 - 2\ln x) + 1$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - 2\ln x = -\infty$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ donc par produit et somme des limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty.$$

$$g'(x) = 2x - 4x \ln x - 2x^2 \times \frac{1}{x}$$

$$= 2x - 4x \ln x - 2x = -4x \ln x$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$; $4x > 0$ donc le signe de $g'(x)$ ne dépend que du signe de $-\ln x$. Pour $x \in]0; 1[$, $-\ln x > 0$ et pour $x \in]1; +\infty[$, $-\ln x < 0$.

x	0	1	$+\infty$
Sens de variation de g	1	2	$-\infty$

b) Pour tout $x \in]0; 1[$ et $g(x) > 1$ par conséquent l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]0; 1[$.

Pour tout $x \in]1; +\infty[$, g est une fonction strictement décroissante et continue, de plus $g(x) \in]-\infty; 2]$ et $0 \in]-\infty; 2]$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α .

x	0	1	α	$+\infty$
Signe de g		+	0	-

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} 1 + x^2 = 1$ donc par quotient des limites $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2} \times \frac{x^2}{1 + x^2} = \frac{\ln x}{x^2} \times \frac{1}{\frac{1}{x^2} + 1} \text{ or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \text{ par}$$

croissance comparée et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2} + 1} = 1$ donc par

produit des limites on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times (1 + x^2) - \ln x \times 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{\frac{1}{x} + x - 2x \ln x}{(1 + x^2)^2}$$

$$= \frac{1 + x^2 - 2x^2 \ln x}{x(1 + x^2)^2} = \frac{g(x)}{x(1 + x^2)^2}$$

or pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$; $x(1 + x^2)^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ ne dépend donc que du signe de $g(x)$.

x	0	1	α	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	-
Sens de variation de f	$-\infty$	$\frac{1}{2\alpha^2}$		0

$$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha^2} \text{ et}$$

$$f(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{1 + \alpha^2} = \frac{1 + \alpha^2}{2^2} \times \frac{1}{1 + \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2}.$$

117. Suite et ln

1. $u_1 = 2\ln 2$; $u_2 = \ln(2\ln 2 + 1) + \ln 2$

2. Soit $P(n) = \{1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2\}$.

Initialisation : $u_0 = 1$ et $u_1 = 2\ln 2$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : on suppose qu'il existe un réel $k \in \mathbb{N}$ tel que $P(k)$ est vraie et montrons que $P(k+1)$ est encore vraie.

Soit la fonction f définie par $f(x) = \ln(x+1) + \ln 2$, f est une fonction croissante sur $] -1 ; +\infty[$ comme composée de fonctions croissantes.

D'où si $1 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 2$

on a $f(1) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(2)$

soit $2\ln 2 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq \ln 3 + \ln 2$

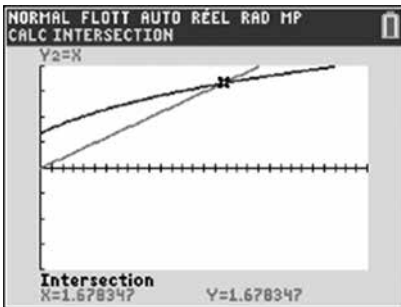
or $1 < 2\ln 2$ et $\ln 3 + \ln 2 < 2$

donc $1 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 2$, d'où $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : en vertu du principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Puisque $u_n \leq u_{n+1}$ cela signifie que la suite (u_n) est croissante, de plus elle est majorée par 2, donc la suite (u_n) est convergente vers un réel α dont on montre qu'il est solution de l'équation $f(x) = x$. Il s'agit donc de résoudre : $\ln(x+1) + \ln 2 = x$. À l'aide de la calculatrice on détermine $1,6 < \alpha < 1,7$.

Remarque : pour justifier rigoureusement que $\alpha \in]1,6 ; 1,7[$, il suffit de mentionner le fait que sur cet intervalle, la fonction h définie par $h(x) = f(x) - x$ est strictement décroissante et continue ($h'(x) = -\frac{x}{x+1}$), et $h(1,6) > 0$; $h(1,7) < 0$.



4. α est solution de l'équation $f(x) = x$ donc $f(\alpha) = \alpha$
 $\Leftrightarrow \ln(\alpha+1) + \ln 2 = \alpha$

$\Leftrightarrow -\alpha + \ln(\alpha+1) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$, on a alors :

$e^{-\alpha + \ln(\alpha+1)} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ soit $e^{-\alpha} \times (\alpha+1) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$.

118. QCM

1. b) démonstration par récurrence pour montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $u_n \geq u_{n+1}$ en utilisant la fonction f définie par $f(x) = \ln(1+x)$, qui est croissante sur $] -1 ; +\infty[$.

2. b) transformer l'équation donnée en l'équation produit nul suivante : $x^2(\ln 2 - x \ln 3) = 0$.

3. c) il faut que $e^{-x} - 2 > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > 2$

$\Leftrightarrow -x > \ln 2 \Leftrightarrow x < -\ln 2$.

119. Points d'intersection

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -(\ln x)^2 = -\infty$ donc par somme des limites $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

$f(x) = \ln x(2 - \ln x)$ or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \ln x = -\infty$

donc par produit de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

2. $f'(x) = \frac{2}{x} - 2 \times \ln x \times \frac{1}{x} = \frac{2(1 - \ln x)}{x}$ pour tout $x \in]0 ; +\infty[: \frac{2}{x} > 0$ le signe de $f'(x)$ est donc le même que celui de $1 - \ln x$.

x	0	e	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Sens de variation de f			

3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x(2 - \ln x) = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = 0$ ou $\ln x = 2$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = e^2$ on a alors $x_A = 1$ et $x_B = e^2$.

120. Dérivées et limites

1. Pour que $\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$ soit défini il faut que

$\frac{x-1}{3-x} > 0$.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x-1$	-	0	+	+
$3-x$	+	+	0	-
$\frac{x-1}{3-x}$	-	0	+	-

Il faut donc dans un 1^{er} temps que $x \in I =]1 ; 3[$.
Afin que f soit définie il faut que

$$\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{3-x} \geq 1 \text{ et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1-(3-x)}{3-x} \geq 0 \text{ et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-4}{3-x} \geq 0 \text{ et } x \in I.$$

x	1	2	3
$2x-4$	-	0	+
$3-x$	+		+
$\frac{2x-4}{3-x}$	-	0	+

$$D_f = [2 ; 3[$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} \text{ avec } u(x) = \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$$

$$\text{or } u'(x) = \frac{(3-x) - (x-1) \times (-1)}{(3-x)^2} \times \frac{3-x}{x-1}$$

$$= \frac{2}{(3-x)^2} \times \frac{3-x}{x-1}$$

$$= \frac{2}{(3-x)(x-1)}$$

$$\text{d'où } f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)}} = \frac{1}{(3-x)(x-1)\sqrt{\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)}}.$$

2. Soit $g(x) = x - \sin x$; $g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $g'(x)$		+	+
Sens de variation de g			
Signe de g		-	0

D'où pour tout $x \geq 0$: $x \geq \sin x$ et pour tout $x \leq 0$: $x \leq \sin x$.

$$\text{Soit } h(x) = x - \frac{x^3}{6} - \sin x, h'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x$$

$$h''(x) = -x + \sin x = -g(x).$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $h''(x)$	+	0	-
Sens de variation de h'			
Signe de $h'(x)$		-	
Sens de variation de h			
Signe de h		+	-

D'où pour tout $x \geq 0$: $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$ et pour tout

$x \leq 0$: $x - \frac{x^3}{6} \geq \sin x$.

Pour tout $\sqrt{6} \geq x \geq 0$:

$$0 \leq x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x : \frac{1}{x - \frac{x^3}{6}} \geq \frac{1}{\sin x} \geq \frac{1}{x}$$

de plus pour tout $x > 0$; $\frac{1}{1+x} < 1$ d'où $\ln\left(\frac{1}{1+x}\right) < 0$ ainsi :

$$\frac{\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)}{x - \frac{x^3}{6}} \leq \frac{\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)}{\sin x} \leq \frac{\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)}{x}$$

$$\text{or } \frac{\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)}{x} = \frac{-\ln(1+x)}{x}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) \text{ avec}$$

$$f(x) = \ln(1+x) ; f'(x) = \frac{1}{1+x} \text{ d'où } f'(0) = 1 \text{ d'où}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)}{x} = -1.$$

$$\frac{\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)}{x - \frac{x^3}{6}} = -\frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6}} \text{ or } \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\ln(1+x)}{x} = -1$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6}} = 1 \text{ donc par produit des limites}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)}{x - \frac{x^3}{6}} = -1, \text{ donc d'après le théorème des } gendarmes$$

$$\text{on en déduit } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)}{\sin x} = -1.$$

On démontre de la même façon que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)}{\sin x} = -1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)}{\sin x} = -1.$$

121. Déterminer f

$$f(1) = 0,5 \Leftrightarrow a + b = 0,5$$

$$f'(x) = 2ax - \frac{2b}{x^3} - 2\ln x \times \frac{1}{x}, f'(1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a - 2b = 0 \Leftrightarrow a = b$$

$$\text{or } a + b = 0,5 \text{ donc } 2a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{4} = b$$

$$\text{ainsi } f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - (\ln x)^2.$$

122. Fonction et suite

1. a) $x \mapsto 1 + \frac{a}{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[: X \mapsto \ln X$

dérivable sur $]0; +\infty[$ et $x \mapsto x$ dérivable sur tout $\mathbb{R}$; la fonction f est donc dérivable sur $]0; +\infty[$ comme composée et produit de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) + x \times \frac{-\frac{a}{x^2}}{1 + \frac{a}{x}} \\ &= \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) - \frac{\frac{a}{x}}{\frac{a+x}{x}} = \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) - \frac{a}{a+x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f''(x) &= \frac{-\frac{a}{x^2}}{1 + \frac{a}{x}} - a \times \frac{-1}{(x+a)^2} \\ &= \frac{-a}{x(x+a)} + \frac{a}{(x+a)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{-a(x+a) + xa}{x(x+a)^2} = \frac{-a^2}{x(x+a)^2}$$

Pour tout $x > 0 : x(x+a)^2 > 0$ et $-a^2 < 0$ donc $f''(x) < 0$, la fonction f' est donc décroissante sur $]0; +\infty[$.

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{a}{x} = 1 \text{ or } \lim_{X \rightarrow 1} \ln X = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) = 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{x+a} = 0 \text{ donc par somme des limites}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0.$$

Puisque la fonction f' est décroissante, cela signifie que $f'(x) > 0$, la fonction f est donc croissante sur $]0; +\infty[$.

$$\begin{aligned} \text{2. a) } v_n &= \ln(u_n) = \ln\left(\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n\right) \\ &= n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) = f(n) \end{aligned}$$

Or f est croissante donc (v_n) est croissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N} : v_n \leq v_{n+1}$ soit $\ln(u_n) \leq \ln(u_{n+1})$ d'où $u_n \leq u_{n+1}$ la suite (u_n) est donc croissante.

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) \text{ avec } f(x) = \ln(1+x).$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \text{ d'où } f'(0) = 1 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$\begin{aligned} v_n &= n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) \\ &= \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)}{\frac{a}{n}} \times a \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{n} = 0 \text{ d'où} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)}{\frac{a}{n}} &= 1 \text{ ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a, \text{ ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^a. \end{aligned}$$

Travaux pratiques

p. 198-201

 TP 1. Approximation de $\ln 2$ par dichotomie

- **Durée estimée** : 30 min
- **Objectif** : Déterminer une valeur approchée de $\ln 2$.

1.

```
def f(x):
    return (exp(x)-2)
```

2. a)

```
from math import *
def f(x):
    return (exp(x)-2)
def Dicho(a,b,f,n):
    while b-a > 10**(-n):
        m = (a+b)/2
        if f(m) < 0:
            a = m
        else:
            b = m
    return (m)
```

b.

```
from math import *
def f(x):
    return (exp(x)-2)
def Dicho(a,b,f,n):
    while b-a > 10**(-n):
        m = (a+b)/2
        if f(a)*f(m) > 0:
            a = m
        else:
            b = m
    return (m)
```

3. a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

b. La console affiche :

```
>>>
0.6931533813476562
```

ce qui signifie qu'une valeur approchée à 10^{-5} près de $\ln 2$ est 0,69315.

TP 2. Algorithme de Briggs

- **Durée estimée** : 45 min
- **Objectif** : Découvrir une approche historique des logarithmes décimaux.

A. 1.

A = 1,000 000 ;	$\ell A = 0,000\ 000\ 0$;	soit $\sqrt{A}$
B = 10,000 000 ;	$\ell B = 1,000\ 000\ 0$;	C = $\sqrt{AB}$
C = 3,162 277 ;	$\ell C = 0,500\ 000\ 0$;	D = $\sqrt{BC}$
D = 5,623 413 ;	$\ell D = 0,750\ 000\ 0$;	E = $\sqrt{CD}$
E = 4,216 964 ;	$\ell E = 0,625\ 000\ 0$;	F = $\sqrt{DE}$
F = 4,869 674 ;	$\ell F = 0,687\ 500\ 0$;	G = $\sqrt{EF}$
G = 5,232 991 ;	$\ell G = 0,718\ 750\ 0$;	H = $\sqrt{FG}$
H = 5,048 065 ;	$\ell H = 0,703\ 125\ 0$;	I = $\sqrt{GH}$
I = 4,958 069 ;	$\ell I = 0,695\ 312\ 5$;	K = $\sqrt{HI}$
K = 5,002 865 ;	$\ell K = 0,699\ 218\ 7$;	L = $\sqrt{IK}$
L = 4,980 416 ;	$\ell L = 0,697\ 265\ 6$;	M = $\sqrt{KL}$
M = 4,991 627 ;	$\ell M = 0,698\ 242\ 1$;	N = $\sqrt{KM}$
N = 4,997 242 ;	$\ell N = 0,698\ 730\ 4$;	O = $\sqrt{KN}$
O = 5,000 052 ;	$\ell O = 0,698\ 974\ 5$;	P = $\sqrt{NO}$
P = 4,998 647 ;	$\ell P = 0,698\ 852\ 5$;	Q = $\sqrt{OP}$
Q = 4,999 350 ;	$\ell Q = 0,698\ 913\ 5$;	R = $\sqrt{OQ}$
R = 4,999 701 ;	$\ell R = 0,698\ 944\ 0$;	S = $\sqrt{OR}$
S = 4,999 876 ;	$\ell S = 0,698\ 959\ 2$;	T = $\sqrt{OS}$
T = 4,999 963 ;	$\ell T = 0,698\ 966\ 8$;	V = $\sqrt{OT}$
V = 5,000 008 ;	$\ell V = 0,698\ 970\ 7$;	W = $\sqrt{TV}$
W = 4,999 984 ;	$\ell W = 0,698\ 968\ 7$;	X = $\sqrt{VW}$
X = 4,999 997 ;	$\ell X = 0,698\ 969\ 7$;	Y = $\sqrt{VX}$
Y = 5,000 003 ;	$\ell Y = 0,698\ 970\ 2$;	Z = $\sqrt{XY}$
Z = 5,000 000 ;	$\ell Z = 0,698\ 970\ 0$;	

$$2. D = \sqrt{BC} = \sqrt{10 \times \sqrt{10}} \text{ et } \ell D = \frac{\ell B + \ell C}{2} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

On retrouve bien les valeurs approchées comme celles données dans la table téléchargée.

3. À partir de G le calcul diffère car E et F sont tous deux inférieurs à 5, et il faut à chaque fois deux nombres qui encadrent 5.

4. Comme vu à l'exercice 113 : $\log 5 = \frac{\ln 5}{\ln 10}$ et

$$\ln \left(10^{\frac{69\ 897}{100\ 000}} \right) = \frac{69\ 897}{100\ 000} \ln 10$$

$$\text{soit } \frac{\ln \left(10^{\frac{69\ 897}{100\ 000}} \right)}{\ln 10} = \frac{69\ 897}{100\ 000} \approx \log 5 \text{ d'où } 10^{\frac{69\ 897}{100\ 000}} \approx 5.$$

B. 1. $x = 5$ et $p = 5$.

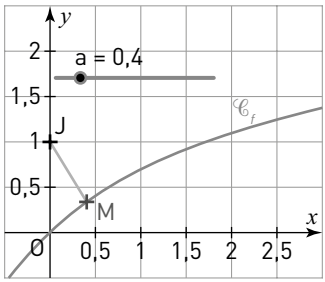
```
2. from math import*
A=1
B=10
lA=0
lB=1
while B-5>10**-5 :
    if sqrt(A*B)<=5 :
        A=sqrt(A*B)
        lA=(lA+lB)/2
    else :
        B=sqrt(A*B)
        lB=(lA+lB)/2
print(lB)
```

>>>
0.6989707946777344

TP 3. Distance d'un point à une courbe

- **Durée estimée** : 45 min
- **Objectif** : Résoudre un problème d'optimisation en conjecturant d'abord la réponse via un logiciel de géométrie dynamique, puis en faisant la démonstration reposant sur l'utilisation des propriétés de la fonction ln.

A. 1. 2. 3.



On conjecture : $x \approx 0,4$ et $JM \approx 0,77$.

B. 1. $g(x) = x^2 + (\ln(1+x) - 1)^2$
 $= x^2 + (\ln(1+x))^2 - 2 \ln(1+x) + 1$

2. $g'(x) = 2x + 2\ln(1+x) \times \frac{1}{1+x} - \frac{2}{1+x}$
 $= 2 \times \frac{x(1+x) + \ln(1+x) - 1}{1+x}$
 $= 2 \times \frac{x^2 + x + \ln(1+x) - 1}{1+x}$
 $= 2 \times \frac{h(x)}{1+x}$ avec $h(x) = x^2 + x + \ln(1+x) - 1$.

3. $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(x+1) = -\infty$ et
 $\lim_{x \rightarrow -1} x^2 + x - 1 = -1$ donc par somme des limites on a $\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = -\infty$.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x - 1 = +\infty$ donc par somme des limites on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

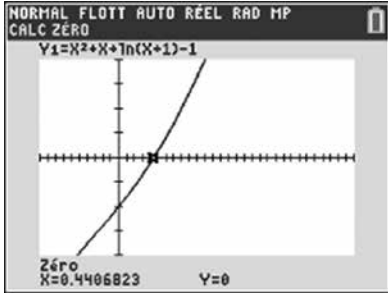
$$h'(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{(2x+1)(x+1)+1}{x+1} = \frac{2x^2 + 3x + 2}{x+1}$$

or pour tout $x \in]-1; +\infty[: x+1 > 0$ donc le signe de $h'(x)$ est le même que celui de $2x^2 + 3x + 2$.

$\Delta = -7$ donc le polynôme $2x^2 + 3x + 2$ est toujours du signe de $a = 2$ soit positif.

x	-1	$+\infty$
Signe de $h'(x)$	+	
Sens de variation de h		

4. Sur l'intervalle $]-1; +\infty[$, la fonction h est strictement croissante et continue, de plus pour tout $x \in]-1; +\infty[$, $h(x) \in \mathbb{R}$ or $0 \in \mathbb{R}$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α .



$\alpha \approx 0,44$

5.

x	-1	α	$+\infty$
Signe de $h(x)$ = signe de $g'(x)$	-	0	+
Sens de variation de g			

6. La fonction g admet donc un minimum atteint en α valant $g(\alpha) = \alpha^2 + (\ln(1 + \alpha))^2 - 2\ln(1 + \alpha) - 1$ or $h(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln(1 + \alpha) = 1 - \alpha^2 - \alpha$

d'où

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= \alpha^2 + (1 - \alpha^2 - \alpha)^2 - 2(1 - \alpha^2 - \alpha) + 1 \\ &= \alpha^2 + (\alpha^4 + 2\alpha^3 - \alpha^2 - 2\alpha + 1) - 2 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 1 \\ &= \alpha^4 + 2\alpha^3 + 2\alpha^2. \end{aligned}$$

7. On retrouve une valeur approchée de celle trouvée pour le curseur $a : a = 0,4$ et $\alpha \approx 0,44$ mais aussi pour la distance $JM = \sqrt{g(0,44)} \approx 0,77$ et $JM \approx 0,77$ sur le logiciel.

TP 4. Intensité sonore

- **Durée estimée :** 40 min
- **Objectif :** Découvrir une application du logarithme décimale permettant de répondre au problème d'ouverture du chapitre.

1. a)

l =	0,000005		L =	66,9897					
k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
l' = k * l	0,00001	0,000015	0,00002	0,000025	0,00003	0,000035	0,00004	0,000045	0,00005
k * L	133,9794	200,9691	267,9588	334,9485	401,9382	468,9279	535,9176	602,9073	669,897
L'	70	71,76091259	73,010299	73,9794000	74,7712125	75,4406804	76,02059991	76,5321251	76,9897000

b) En B4 saisir : = B3 * \$B1.

c) En B5 saisir : = B3 * \$E1.

d) En B6 saisir : = 10*log10 $\left(\frac{B4}{10^{-12}}\right)$.

e) On remarque que $D6 \neq D5$, ce qui signifie que si on quadruple l'intensité sonore, le niveau d'intensité sonore quant à lui ne semble pas quadrupler.

2. a) $L' = 10 \times \log\left(\frac{4I}{I_0}\right)$ on applique simplement la définition donnée en 1.

$$\begin{aligned} \text{b) } L' &= 10 \times \log\left(4 \times \frac{I}{I_0}\right) \\ &= 10 \times \left(\log 4 + \log\left(\frac{I}{I_0}\right)\right) \\ &= 10\log 4 + 10\log \frac{I}{I_0} \approx 6 + L. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{3. } L' &= 10 \times \log 0,2 \times \frac{I}{I_0} \\ &= 10 \times \log(0,2) + 10 \times \log \frac{I}{I_0} \approx -7 + L \end{aligned}$$