



Nom et prénom :

Exercice 1.**4 points**

- Simplifier au maximum l'écriture de l'expression suivante : $A = \ln(2) + \ln(16e) - \ln(4e^2)$

$$\begin{aligned}
 A &= \ln(2) + \ln(16e) - \ln(4e^2) \\
 A &= \ln(2) + \ln(2^4) + \ln(e) - (\ln(2^2) + \ln(e^2)) \\
 A &= \ln(2) + 4\ln(2) + \ln(e) - 2\ln(2) - 2\ln(e) \\
 A &= 3\ln(2) + 1 - 2 \\
 A &= 3\ln(2) - 1
 \end{aligned}$$

- Exprimer le nombre suivant en fonction de $\ln(3)$ et $\ln(5)$: $B = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{15}\right)$

$$B = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{15}\right) = \ln(\sqrt{3}) - \ln(15) = \frac{1}{2}\ln(3) - \ln(3 \times 5) = \frac{1}{2}\ln(3) - \ln(3) - \ln(5) = -\frac{1}{2}\ln(3) - \ln(5)$$

Exercice 2.**7,5 points**

- Résoudre l'équation suivante en précisant l'ensemble d'existence : $e^{4x+5} - 5 = 0$

Ensemble d'existence : $] -\infty; +\infty[$

Résolution :

Pour tout réel x ,

$$e^{4x+5} - 5 = 0 \Leftrightarrow e^{4x+5} = 5 \quad \text{car } \ln(e) = 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^{4x+5}) = \ln(5) \quad \text{car la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur } \mathbb{R}^{*+}$$

$$\Leftrightarrow 4x + 5 = \ln(5) \quad \text{car pour tous réels } a \text{ et } b \text{ strictement positifs : } \ln a \leq \ln b \text{ équivaut à } a \leq b$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(5) - 5}{4}$$

Conclusion : $S = \left\{ \frac{\ln(5) - 5}{4} \right\}$

- Résoudre l'équation suivante en précisant l'ensemble d'existence : $2\ln(x) = \ln(2-x)$

Ensemble d'existence : $E =]0; 2[$

puisque

- $\ln(x)$ donc $x > 0$

- $\ln(2-x)$ donc $2-x > 0 \Leftrightarrow 2 > x$

Résolution :

Pour tout réel $x \in]0; 2[$,

$$2\ln(x) = \ln(2-x) \Leftrightarrow \ln(x^2) = \ln(2-x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2-x \quad \text{car pour tous réels } a \text{ et } b \text{ strictement positifs : } \ln a = \ln b \text{ équivaut à } a = b$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

On cherche donc les solutions de $x^2 + x - 2 = 0$,

on détermine le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$



Le discriminant étant positif, le polynôme admet deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

et

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 3}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

On obtient deux solutions possibles : 1 et -2

Conclusion : Comme $1 \in]0; 2[$ et $-2 \notin]0; 2[$ alors $S = \{1\}$

- Résoudre l'inéquation suivante en précisant l'ensemble d'existence : $1 - 2\ln(2x) \geq 0$

Ensemble d'existence : $]0; +\infty[$ car $x > 0$

Résolution :

Pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{aligned} 1 - 2\ln(2x) \geq 0 &\Leftrightarrow 1 \geq 2\ln(2x) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \ln(2x) \\ &\Leftrightarrow \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) \geq \ln(2x) \\ &\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}} \geq 2x \\ &\Leftrightarrow \sqrt{e} \geq 2x \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{e}}{2} \geq x \end{aligned}$$

Solution possible : $x \leq \frac{\sqrt{e}}{2}$

Conclusion : Comme $x \in]0; +\infty[$ alors $S = \left]0; \frac{\sqrt{e}}{2}\right]$

Exercice 3.

2,5 points

Déterminer le plus petit entier n tel que $500 \times 0,7^n \leq 1$.

$$\begin{aligned} \text{On a } 500 \times 0,7^n \leq 1 &\Leftrightarrow 0,7^n \leq \frac{1}{500} \\ &\Leftrightarrow 0,7^n \leq 0,002 \\ &\Leftrightarrow \ln(0,7^n) \leq \ln(0,002) \quad \text{car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0; +\infty[\\ &\Leftrightarrow n \times \ln(0,7) \leq \ln(0,002) \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,002)}{\ln(0,7)} \quad \text{car } \ln(0,7) < 0 \end{aligned}$$

$$\text{Or } \frac{\ln(0,002)}{\ln(0,7)} \approx 17,42$$

Donc le plus petit entier n tel que $500 \times 0,7^n \leq 1$ est 18.


Exercice 4.
6 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{3} - 2\ln(x)$ et dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$.
2. Donner le tableau des variations de f . On précisera la valeur exacte du minimum de f .
3. Déterminer une équation de la tangente T_1 à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{3} - 2\ln(x)$.

1. On a $f(x) = \frac{x}{3} - 2\ln(x)$ sur $]0; +\infty[$

Alors la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables.

$$\text{D'où } f'(x) = \frac{1}{3} - 2\frac{1}{x} = \frac{x-6}{3x}$$

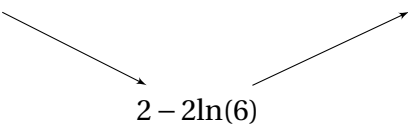
$$\text{Donc } f'(x) = \frac{x-6}{3x}$$

2. Les variations de la fonction f se déduisent du signe de sa dérivée.

$$\text{On a } f'(x) = \frac{x-6}{3x}$$

Or sur l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x)$ est du même signe que $x-6$

D'où le tableau établissant le signe de la dérivée ainsi que les variations de f

x	0	6	$+\infty$
$x - 6$ $f'(x)$		- 0 +	
Variation de f			

D'après le tableau des variations f admet un minimum atteint pour $x=6$ et $f(6) = 2 - 2\ln(6)$

3. On cherche $\mathcal{T}_\infty$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

$$\text{On a } \mathcal{T}_\infty : y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$\text{avec } f'(1) = \frac{1-6}{3} = -\frac{5}{3}$$

$$\text{et } f(1) = \frac{1}{3} - 2\ln(1) = \frac{1}{3}$$

$$\text{D'où } T_1 : y = -\frac{5}{3}(x-1) + \frac{1}{3}$$

$$y = -\frac{5}{3}x + \frac{5}{3} + \frac{1}{3}$$

$$y = -\frac{5}{3}x + \frac{6}{3}$$

$$y = -\frac{5}{3}x + 2$$

Donc l'équation de la tangente T_1 à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est $y = -\frac{5}{3}x + 2$