



Nom et prénom :

Exercice 1.**4 points**

- Simplifier au maximum l'écriture de l'expression suivante : $A = \frac{\ln(6) - \ln(12)}{2\ln(\sqrt{2})}$

$$A = \frac{\ln(6) - \ln(12)}{2\ln(\sqrt{2})} = \frac{\ln(6) - \ln(2 \times 6)}{2 \times \frac{1}{2}\ln(2)} = \frac{\ln(6) - (\ln(2) + \ln(6))}{\ln(2)} = \frac{\ln(6) - \ln(2) - \ln(6)}{\ln(2)} = \frac{-\ln(2)}{\ln(2)} = \boxed{-1}$$

- Ecrire le nombre B à l'aide d'un seul logarithme : $B = 2\ln(3) + \ln(2) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 3$

$$\begin{aligned} B &= 2\ln(3) + \ln(2) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 3 \\ B &= \ln(3^2) + \ln(2) - (-\ln(2)) - 3\ln(e) \\ B &= \ln(3^2) + \ln(2) + \ln(2) - \ln(e^3) \\ B &= \ln(9 \times 2 \times 2) - \ln(e^3) \\ B &= \ln\left(\frac{36}{e^3}\right) \end{aligned}$$

Exercice 2.**7,5 points**

- Résoudre l'équation suivante en précisant l'ensemble de d'existence : $e^{2x+3} - 3 = 0$

Ensemble d'existence : $] -\infty; +\infty[$

Résolution :

Pour tout réel x ,

$$e^{2x+3} - 3 = 0 \Leftrightarrow e^{2x+3} = 3 \quad \text{car } \ln(e) = 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^{2x+3}) = \ln(3) \quad \text{car la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur }]0; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow 2x + 3 = \ln(3) \quad \text{car pour tous réels } a \text{ et } b \text{ strictement positifs : } \ln a = \ln b \text{ équivaut à } a = b$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(3) - 3}{2}$$

Conclusion : $S = \left\{ \frac{\ln(3) - 3}{2} \right\}$

- Résoudre l'équation suivante en précisant l'ensemble d'existence : $2\ln(x) = \ln(6 - x)$

Ensemble d'existence : $E =]0; 6[$

puisque

▪ $\ln(x)$ donc $x > 0$

▪ $\ln(6 - x)$ donc $6 - x > 0 \Leftrightarrow 6 > x$

Résolution :

Pour tout réel $x \in]0; 6[$,

$$2\ln(x) = \ln(6 - x) \Leftrightarrow \ln(x^2) = \ln(6 - x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 6 - x \quad \text{car pour tous réels } a \text{ et } b \text{ strictement positifs : } \ln a = \ln b \text{ équivaut à } a = b$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

On cherche donc les solutions de $x^2 + x - 6 = 0$,



on détermine le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$

Le discriminant étant positif, le polynôme admet deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 5}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

et

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 5}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

On obtient deux solutions possibles : 2 et -3

Conclusion : Comme $2 \in]0; 6[$ et $-3 \notin]0; 6[$ alors $S = \{2\}$

- Résoudre l'inéquation suivante en précisant l'ensemble d'existence : $2\ln(x-1) - 1 \leq 0$

Ensemble d'existence : $]1; +\infty[$ car $x - 1 > 0$

Résolution :

Pour tout réel $x > 1$,

$$\begin{aligned} 2\ln(x-1) - 1 \leq 0 &\Leftrightarrow \ln(x-1) \leq \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 2\ln(x-1) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \ln(x-1) \leq \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \ln(x-1) \leq \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) \\ &\Leftrightarrow x-1 \leq e^{\frac{1}{2}} \\ &\Leftrightarrow x-1 \leq \sqrt{e} \\ &\Leftrightarrow x \leq 1 + \sqrt{e} \end{aligned}$$

Solution possible : $x \leq 1 + \sqrt{e}$

Conclusion : Comme $x \in]1; +\infty[$ alors $S =]1; 1 + \sqrt{e}]$

Exercice 3.

2,5 points

Déterminer le plus petit entier n tel que $50 \times 0,9^n \leq 0,1$.

$$\begin{aligned} \text{On a } 50 \times 0,9^n \leq 0,1 &\Leftrightarrow 0,9^n \leq \frac{0,1}{50} \\ &\Leftrightarrow 0,9^n \leq 0,002 \\ &\Leftrightarrow \ln(0,9^n) \leq \ln(0,002) \quad \text{car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0; +\infty[\\ &\Leftrightarrow n \times \ln(0,9) \leq \ln(0,002) \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,002)}{\ln(0,9)} \quad \text{car } \ln(0,9) < 0 \end{aligned}$$

$$\text{Or } \frac{\ln(0,002)}{\ln(0,9)} \approx 58,98$$

Donc le plus petit entier n tel que $50 \times 0,9^n \leq 0,1$ est 59.

**Exercice 4.****6 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2\ln(x) - \frac{x}{2}$ et dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$.
2. Donner le tableau des variations de f . On précisera la valeur exacte du maximum de f .
3. Déterminer une équation de la tangente T_1 à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2\ln(x) - \frac{x}{2}$.

1. On a $f(x) = 2\ln(x) - \frac{x}{2}$ sur $]0; +\infty[$

Alors la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables.

$$\text{D'où } f'(x) = 2\frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \frac{4-x}{2x}$$

$$\text{Donc } f'(x) = \frac{4-x}{2x}$$

2. Les variations de la fonction f se déduisent du signe de sa dérivée.

$$\text{On a } f'(x) = \frac{4-x}{2x}$$

Or sur l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x)$ est du même signe que $4-x$

D'où le tableau établissant le signe de la dérivée ainsi que les variations de f

x	0	4	$+\infty$	
$4-x$ $f'(x)$		+	0	-
Variation de f			$2\ln(4)-2$	

D'après le tableau des variations, f admet un maximum atteint pour $x = 4$ et $f(4) = 2\ln(4) - 2$

3. On cherche $\mathcal{T}_1$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

$$\text{On a } \mathcal{T}_1 : y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$\text{avec } f'(1) = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{et } f(1) = 2\ln(1) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{D'où } T_1 : y = \frac{3}{2}(x-1) - \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{4}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}x - 2$$

Donc l'équation de la tangente T_1 à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est $y = \frac{3}{2}x - 2$