



Nom et prénom :

Exercice 1.**4 points**

- Simplifier l'écriture de l'expression suivante : $A = \frac{\ln(e)}{\ln(e^2)} + \ln\left(\frac{1}{e}\right)$

$$\left| A = \frac{\ln(e)}{\ln(e^2)} + \ln\left(\frac{1}{e}\right) \right.$$

- Exprimer le nombre suivant en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$: $B = \ln(216) - \ln(9)$

$$\left| B = \ln(216) - \ln(9) = \ln\left(\frac{216}{9}\right) = \ln(24) = \ln(3 \times 8) = \ln(3 \times 2^3) = \ln(3) + 3\ln(2) \right.$$

Exercice 2.**6 points**

- Résoudre l'équation suivante où x désigne un nombre réel : $e^{3-2x} - 2 = 0$

Ensemble de définition : $] -\infty; +\infty[$

Résolution :

Pour tout réel x ,

$$e^{3-2x} - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{3-2x} = 2 \quad \text{car } \ln(e) = 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^{3-2x}) = \ln(2) \quad \text{car la fonction logarithme népérien est croissante}$$

$$\Leftrightarrow 3 - 2x = \ln(2) \quad \text{car pour tous réels } a \text{ et } b \text{ strictement positifs : } \ln a \leq \ln b \text{ équivaut à } a \leq b$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 - \ln(2)}{2}$$

Conclusion : $S = \left\{ \frac{3 - \ln(2)}{2} \right\}$

- Résoudre l'inéquation suivante où x désigne un nombre réel : $2 \ln(x-1) \leq 1$

Ensemble de définition : $]1; +\infty[$ car $x - 1 > 0$

Résolution :

Pour tout réel $x > 0$,

$$2 \ln(x-1) \leq 1 \Leftrightarrow \ln(x-1) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln(x-1) \leq \ln(e^{\frac{1}{2}})$$

$$\Leftrightarrow x-1 \leq e^{\frac{1}{2}} \quad \text{Pour tous réels } a \text{ et } b \text{ strictement positifs : } \ln a \leq \ln b \text{ équivaut à } a \leq b$$

$$\Leftrightarrow x \leq 1 + \sqrt{e}$$

Conclusion : $S =]1; 1 + \sqrt{e}]$

**Exercice 3.****3 points**

Déterminer le plus petit entier n tel que $1,05^n \geq 1,5$.

$$1,05^n \geq 1,5 \Leftrightarrow \ln(1,05^n) \geq \ln(1,5) \quad \text{car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante}$$

$$\Leftrightarrow n \ln(1,05) \geq \ln(1,5)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(1,5)}{\ln(1,05)}$$

$$\text{Or } \frac{\ln(1,5)}{\ln(1,05)} \approx 8,3$$

Donc le plus petit entier n tel que $1,05^n \geq 1,5$ est 9.

Exercice 4.**7 points**

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]0;8]$ par $f(x) = -x^2 + 11x - 9 \ln(x)$.

Etudier les variations de la fonction f sur $]0;8]$. On note f' la dérivée de la fonction f .

1. On détermine la dérivée f' de la fonction f .

$$\text{On a } f(x) = -x^2 + 11x - 9 \ln(x)$$

Alors la fonction f est dérivable sur $]0;8]$

$$\text{Alors pour tout réel } x \text{ de l'intervalle }]0;8] : f'(x) = -2x + 11 - \frac{9}{x} = \frac{-2x^2 + 11x - 9}{x}$$

2. On étudie le signe de la dérivée f'

$$\text{Comme } f'(x) = \frac{-2x^2 + 11x - 9}{x} \text{ sur }]0;8]$$

Alors $f'(x)$ est du signe de $-2x^2 + 11x - 9$ puisque $x > 0$

Etudions le signe de $-2x^2 + 11x - 9$,

$$\text{Son déterminant } \Delta = b^2 - 4ac = (11)^2 - 4 \times (-2) \times (-9) = 121 - 72 = 49$$

$$\text{Les deux racines sont } x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-11 - 7}{2 \times (-2)} = \frac{-18}{-4} = \frac{9}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-11 + 7}{2 \times (-2)} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Comme $\Delta = 49 > 0$ et $a = -2 < 0$, on en déduit le tableau de signes

x	0	1	$\frac{9}{2}$	8		
$f'(x)$		-	0	+	0	-

3. On peut en déduire les variations de la fonction f

x	0	1	$\frac{9}{2}$	8		
$f'(x)$		-	0	+	0	-
Variation de f				$\frac{117}{4} - 9\ln(4,5)$		
			10			$24 - 9\ln(8)$

Donc la fonction f est décroissante sur $]0;1] \cup \left[\frac{9}{2};8\right]$ et croissante sur $\left[1;\frac{9}{2}\right]$.