



Nom et prénom :

Exercice 1. Déterminer les limites suivantes

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{0,1^n}$

Correction

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + \frac{1}{\sqrt{n}} = 3$$

Par ailleurs, puisque $0 < 0,1 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,1^n = 0^+$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{0,1^n} = +\infty$

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2n^3 - 5n^2}{3n^3 - 5}$

Correction

Pour tout entier $n \geq 1$, on a $\frac{-2n^3 - 5n^2}{3n^3 - 5} = \frac{n^3(-2 - \frac{5}{n})}{n^3(3 - \frac{5}{n^3})} = \frac{-2 - \frac{5}{n}}{3 - \frac{5}{n^3}}$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n} = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2 - \frac{5}{n} = -2$

Et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 - \frac{5}{n^3} = 3$

Par quotient des limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2n^3 - 5n^2}{3n^3 - 5} = -\frac{2}{3}$

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \sin n}{n}$

Correction

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $-1 \leq \sin n \leq 1$

d'où $1 \leq 2 + \sin n \leq 3$ puis $0 \leq \frac{1 + \sin n}{n} \leq \frac{3}{n}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$,

d'après le théorème des gendarmes, on obtient que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \sin n}{n} = 0$

Exercice 2. Résoudre les équations et l'inéquation ci-dessous :

1. $\ln(6 - x) = 1$

Correction

• Ensemble de définition : $] -\infty; 6[$ car $6 - x > 0 \Leftrightarrow x < 6$.

• Résolution : $\ln(6 - x) = 1 \Leftrightarrow \ln(6 - x) = \ln(e) \Leftrightarrow 6 - x = e \Leftrightarrow x = 6 - e$.

• Conclusion : comme $x = 6 - e < 6$ donc $\mathcal{S} = \{6 - e\}$



2. $e^{2x-5} = 3$

Correction

- Ensemble de définition : $\mathbb{R}$
- Résolution : $e^{2x-5} = 3 \iff 2x - 5 = \ln 3 \iff x = \frac{\ln 3 + 5}{2}$.
- Conclusion : $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\ln 3 + 5}{2} \right\}$

3. $\ln(x+6) < \ln(-x+5)$

Correction

- Ensemble de définition : $E =]-6; 5[$ car $x+6 > 0 \iff x > -6$ et $-x+5 > 0 \iff x < 5$.
- Résolution : $\ln(x+6) < \ln(-x+5) \iff x+6 < -x+5$ (car $\ln$ est str. croissante sur $]0; +\infty[$)

$$\iff 2x < -1$$

$$\iff x < -\frac{1}{2}$$
- Conclusion : comme $x \in]-6; 5[$ et $x < -\frac{1}{2}$ donc $\mathcal{S} = \left] -6; -\frac{1}{2} \right[$

4. $\ln((x+3)(x-3)) = \ln(8x)$

Correction

- Ensemble de définition : $E =]3; +\infty[$
 - $(x+3)(x-3) > 0 \iff x \in]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$.
 - $8x > 0 \iff x > 0$
- Résolution : Supposons $x \in E$.

$$\ln((x+3)(x-3)) = \ln(8x) \iff (x+3)(x-3) = 8x \iff x^2 - 9 = 8x \iff x^2 - 8x - 9 = 0.$$

$$\Delta = 100 > 0 \text{ et l'équation } x^2 - 8x - 9 = 0 \text{ a deux solutions : } x_1 = -1 \notin E \text{ et } x_2 = 9 \in E.$$
- Conclusion : Comme $E =]3; +\infty[$ et $x_1 = -1 \notin E$ et $x_2 = 9 \in E$ alors l'ensemble des solution est donc $\mathcal{S} = \{9\}$

Exercice 3. Exprimer le nombre A sous la forme $a \ln 5$ $A = 5 \ln(5) - \ln(25) + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

Correction

$$A = 5 \ln(5) - \ln(25) + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 5 \ln(5) - \ln(5^2) - \ln(\sqrt{5}) = 5 \ln(5) - 2 \ln(5) - \frac{1}{2} \ln(5)$$

$$\boxed{A = \frac{5}{2} \ln(5)}$$