

**Exercice 1.** Déterminer les limites suivantes

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{0,1^n}$

Correction

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 5 - \frac{1}{\sqrt{n}} = 5$$

Par ailleurs, puisque $0 < 0,1 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,1^n = 0^+$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{0,1^n} = +\infty$

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^3 - 5}{-2n^3 - 5n^2}$

Correction

Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\frac{3n^3 + 5}{-2n^3 - 5n^2} = \frac{n^3 \left(3 + \frac{5}{n^3}\right)}{n^3 \left(-2 - \frac{5}{n}\right)} = \frac{3 + \frac{5}{n^3}}{-2 - \frac{5}{n}}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n^3} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n} = 0$,

on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + \frac{5}{n^3} = 3$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2 - \frac{5}{n} = -2$,

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^3 - 5}{-2n^3 - 5n^2} = -\frac{3}{2}$.

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sin n}{n}$

Correction

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $-1 \leq \sin n \leq 1$ d'où $0 \leq 1 + \sin n \leq 2$

puis $0 \leq \frac{1 + \sin n}{n} \leq \frac{2}{n}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$,

d'après le théorème des gendarmes, on obtient que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sin n}{n} = 0$.



Exercice 2. Résoudre les équations et l'inéquation ci-dessous :

1. $\ln(5 - x) = 1$

Correction

Condition : $5 - x > 0 \Leftrightarrow x < 5$.

Supposons $x < 5$. $\ln(5 - x) = 1 \Leftrightarrow 5 - x = e \Leftrightarrow x = 5 - e < 5$.

Donc $\mathcal{S} = \{5 - e\}$.

2. $e^{5x-4} = 4$

Correction

$$e^{5x-4} = 4 \Leftrightarrow 5x - 4 = \ln 4 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 4 + 4}{5}.$$

$$\text{Donc } \mathcal{S} = \left\{ \frac{\ln 4 + 4}{5} \right\}$$

3. $\ln(x+6) < \ln(-x+3)$

Correction

Condition : $x+6 > 0 \Leftrightarrow x > -6$ et $-x+3 > 0 \Leftrightarrow x < 3$ on note $E =]-6; 3[$.

Supposons $x \in E$. $\ln(x+6) < \ln(-x+3) \Leftrightarrow x+6 < -x+3$ (car $\ln$ est str. $\nearrow$.) Cette inéquation équivaut à $2x < -3$ soit $x < -\frac{3}{2}$.

L'ensemble des solution est donc $] -6; -\frac{3}{2}[$

4. $\ln((x+3)(x-3)) = \ln(8x)$

Correction

Condition :

- $(x+3)(x-3) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$.

- $8x > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

On note $E =]3; +\infty[$.

Supposons $x \in E$. $\ln((x+3)(x-3)) = \ln(8x) \Leftrightarrow (x+3)(x-3) = 8x \Leftrightarrow x^2 - 9 = 8x \Leftrightarrow x^2 - 8x - 9 = 0$.

$\Delta = 100 > 0$ et l'équation $x^2 - 8x - 9 = 0$ a deux solutions : $x_1 = -1 \notin E$ et $x_2 = 9 \in E$.

L'ensemble des solution est donc $\mathcal{S} = \{9\}$.

Exercice 3. Exprimer le nombre A sous la forme $a \ln 3$ $A = 5 \ln(3) - \ln(27) + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Correction

$$A = 5 \ln(3) - \ln(27) + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 5 \ln(3) - \ln(3^3) - \ln(\sqrt{3}) = 5 \ln(3) - 3 \ln(3) - \frac{1}{2} \ln(3) = \frac{3}{2} \ln(3)$$