



Exercices : Logarithme népérien

I Propriétés algébriques

Exercice 1. Simplifier.

1. $e^{\ln 3}$ 2. $e^{-\ln 5}$ 3. $e^{\ln(\frac{1}{3})}$ 4. $\ln(e^5)$ 5. $\ln 1 + \ln e$ 6. $\ln(e^{-2})$

Exercice 2. Exprimer chacun des nombres suivants sous la forme $\ln c$ où c est un réel strictement positif.

1. $A = \ln 7 + \ln 8$ 2. $B = \ln 20 - \ln 4$ 3. $C = -\ln 4 + \ln 28$ 4. $E = -2\ln 4$

Exercice 3. Dans chacun des cas, comparer les réels A et B .

1. $A = \ln 2 + \ln 5$ et $B = \ln 9$ 3. $A = 3\ln 2$ et $B = 2\ln 3$
 2. $A = \ln 4$ et $B = \ln 6 - \ln 2$ 4. $A = \ln 25$ et $B = 2\ln 5$

Exercice 4. Calculer les nombres réels suivants.

1. $\ln(0,5) + \ln 2$ 2. $3\ln 2 - \ln 4$ 3. $(\ln(e^3))^2$ 4. $e^{\ln 2 + \ln 3}$

Exercice 5. Exprimer les nombres suivants sous forme d'un entier ou d'un inverse entier.

1. $A = e^{2\ln 3}$ 2. $B = e^{4\ln 2}$ 3. $C = e^{-\ln 4}$ 4. $D = e^{-5\ln 2}$

Exercice 6. Simplifier au maximum les expressions suivantes :

1. $A = e^{\ln 6 - 2\ln 3}$ 2. $B = e^{3\ln 2 - \ln 4 + 1}$ 3. $C = \frac{e^{\ln 5 - 1}}{e^{2 + \ln 5}}$ 4. $D = \frac{e^{2\ln 3 - \ln 2}}{e^{-3\ln 2}}$

Exercice 7. Exprimer chacun des nombres suivants sous la forme $\ln c$ où c est un réel strictement positif.

1. $A = 2\ln 5 + \ln 3$ 2. $B = 3\ln 3 - 2\ln 2$ 3. $C = -\ln 5 + 3\ln 2$ 4. $D = 3\ln 4 - 3\ln 2$

Exercice 8. Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 2$.

1. $\ln 8$ 2. $\ln(\sqrt{2})$ 3. $\ln\left(\frac{1}{4}\right)$ 4. $3\ln 2 - \ln 16$

Exercice 9. Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$.

1. $\ln 20$ 2. $\ln 100$ 3. $\ln\left(\frac{4}{25}\right)$ 4. $\ln \sqrt{10}$



II Équations

Exercice 10. Résoudre les équations suivantes.

1. $e^x = 2$

2. $e^x = -5$

3. $e^x = \frac{1}{4}$

Exercice 11. Résoudre les équations suivantes.

1. $\ln x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

3. $\ln x = -\ln 9$

5. $\ln x = -1$;

2. $\ln x = \frac{\ln 5}{2}$

4. $\ln x = 2$;

6. $3\ln x - 9 = 0$.

Exercice 12. Résoudre les équations suivantes.

1. $(\ln x - 2)(1 + \ln x) = 0$

2. $(e^x - 3)(e^x + 5) = 0$

3. $(\ln x)(6 - 3\ln x) = 0$

Exercice 13. Résoudre les équations suivantes :

1. $2 + 3\ln x = 14$;

2. $\ln(x^2) = \ln 9$;

3. $e^{2-3x} = 5$;

4. $2e^{2x} - 10 = 0$.

Exercice 14. Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln(2 - x) + 1 = 0$;

2. $\ln x + \ln(x - 1) = \ln 5$;

3. $\ln(3x) - \ln(1 - x) = \ln 2$.

Exercice 15 (Changement de variable). 1. Résoudre l'équation $X^2 - 2X - 15 = 0$.

2. En déduire les solutions des équations suivantes :

(a) $e^{2x} - 2e^x - 15 = 0$;

(b) $(\ln x)^2 - 2\ln x - 15 = 0$.

Exercice 16. Résoudre les équations suivantes :

1. $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$

2. $2(\ln x)^2 + 5\ln x - 3 = 0$



III Inéquations

Exercice 17. Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\ln(x) \geq 1$

2. $\ln(x) > -2$

3. $\ln(x) \leq \frac{1}{2}$

4. $\ln(x) < 3$

Exercice 18. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\ln(2-3x) \geq 0$;

2. $\ln(1-x) < 1$;

3. $\ln\left(\frac{3}{x}\right) > \ln 3$.

Exercice 19. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $2\ln(x) \geq \ln(2-x)$;

2. $\ln(x) + \ln(2x+5) \leq \ln 3$;

3. $\ln(4x) - \ln 2 < 2\ln 4$.

Exercice 20. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $e^x > 3$

4. $2e^x - 3 > 9$

7. $\ln(-2x+1) \leq 0$

2. $e^x \leq \frac{1}{2}$

5. $4e^x - 1 \geq e^x + 5$

8. $\ln\left(\frac{3x-1}{x+2}\right) \geq 0$

3. $e^x < -e$

6. $e^{2x} - 5e^x < 0$

9. $\ln(2x-1) + 1 > 0$

Exercice 21. Dans chacun des cas suivants, en utilisant la fonction $\ln$, déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

1. $(0,7)^n \leq 10^{-2}$;

2. $(1,05)^n > 10$;

3. $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-7}$;

4. $(0,98)^{n-1} < 0,6$.

Exercice 22. Un enquêteur effectue un sondage par téléphone. La probabilité que le correspondant décroche et accepte de répondre à l'enquête est de $\frac{1}{5}$.

Combien d'appels l'enquêteur doit-il passer au minimum, pour que la probabilité qu'au moins un correspondant réponde au sondage soit supérieure à 0,999 ?



IV Étude de fonction

Exercice 23. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln x$.

1. Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Pour tout réel $x > 0$, calculer $f'(x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f .
4. En déduire que f admet un minimum sur $]0; +\infty[$ que l'on précisera.

Exercice 24. Déterminer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

1. $f(x) = 3x + 5 - \ln x$
2. $f(x) = \ln x + x^4$
3. $f(x) = \frac{1}{x} + 4 \ln x$
4. $f(x) = (\ln x)(x + 1)$

Exercice 25. Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0; +\infty[$.

1. $f(x) = 5x - x \ln x$
2. $f(x) = \frac{3 - \ln x}{x}$
3. $f(x) = \frac{4}{\ln x}$

Exercice 26. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (d'unité graphique 2 cm).

1. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$.
(b) Dresser le tableau de variation de f .
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3. Déterminer une équation de la tangente T au point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.
4. Construire $\mathcal{C}$ et T .

Exercice 27. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (\ln x)^3 - 3 \ln x$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{3(\ln x - 1)(\ln x + 1)}{x}$.
2. Dresser le tableau des variations de f .
3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
4. Construire $\mathcal{C}$ et son asymptote.



V Fonction $\ln(u)$

Exercice 28. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \ln(5x - 3)$
2. $g : x \mapsto \ln(-8x + 4)$
3. $h : x \mapsto \ln(-7x)$
4. $k : x \mapsto \ln(x^2 - 2x + 1)$

Exercice 29. Dans chaque cas, calculer $f'(x)$ sur l'intervalle I .

1. $f(x) = \ln(5x - 1)$, $I = \left] \frac{1}{5}; +\infty \right[$
2. $f(x) = \ln(3x^2 - 5x + 7)$, $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \ln(9 - x^2)$, $I =]-3; 3[$
4. $f(x) = \ln(1 + e^x)$, $I = \mathbb{R}$

Exercice 30. Soit f la fonction définie sur $\left] \frac{1}{3}; +\infty \right[$ par : $f(x) = \ln(3x - 1)$.

1. Justifier que f est bien définie sur $\left] \frac{1}{3}; +\infty \right[$.
2. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Interpréter graphiquement.
3. Pour tout réel $x > \frac{1}{3}$, calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f .

Exercice 31. Soit f la fonction définie sur $] -4 ; 4[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{x+4}{4-x}\right)$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Pour tout réel $x \in] -4 ; 4[$, comparer $f(-x)$ et $f(x)$. En déduire que $\mathcal{C}$ possède un élément de symétrie.
2. Étude de f sur $[0 ; 4[$.
 - (a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0 ; 4[$.
 - (b) En déduire le sens de variation de f sur $[0 ; 4[$.
 - (c) Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en 0.
 - (d) Calculer l'abscisse du point A de $\mathcal{C}$ d'ordonnée 1. En donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près.
3. Tracer précisément la courbe $\mathcal{C}$ en utilisant les résultats obtenus précédemment.



VI Logarithmes et suites

Exercice 32. En 2015, la population d'une ville compte 250 000 habitants. Chaque année, cette population diminue de 2%. À partir de quelle année la population passera-t-elle au-dessous de 100 000 habitants ?

Exercice 33 (Placement). Un capital est placé à intérêts composés au taux annuel de 3%. Au bout de combien d'années, ce capital aura-t-il plus que doublé ?

Exercice 34. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n \geq 10^9$.

Exercice 35. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{2}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

(a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_n et u_n en fonction de n .

(c) En déduire la limite de la suite (u_n) .

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $w_n = \ln(v_n)$.

(a) Montrer que la suite (w_n) est bien définie.

(b) Montrer que la suite (w_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer w_n en fonction de n .