



Exercices : Logarithme népérien

I Propriétés algébriques

Exercice 1. Simplifier.

1. $e^{\ln 3}$ 2. $e^{-\ln 5}$ 3. $e^{\ln(\frac{1}{3})}$ 4. $\ln(e^5)$ 5. $\ln 1 + \ln e$ 6. $\ln(e^{-2})$

Correction

1. 3 2. $\frac{1}{5}$ 3. $\frac{1}{3}$ 4. 5 5. 1 6. -2

Exercice 2. Exprimer chacun des nombres suivants sous la forme $\ln c$ où c est un réel strictement positif.

1. $A = \ln 7 + \ln 8$ 2. $B = \ln 20 - \ln 4$ 3. $C = -\ln 4 + \ln 28$ 4. $E = -2\ln 4$

Correction

1. $A = \ln 56$ 2. $B = \ln 5$ 3. $C = \ln 7$ 4. $E = \ln\left(\frac{1}{16}\right)$

Exercice 3. Dans chacun des cas, comparer les réels A et B .

1. $A = \ln 2 + \ln 5$ et $B = \ln 9$ 3. $A = 3\ln 2$ et $B = 2\ln 3$
2. $A = \ln 4$ et $B = \ln 6 - \ln 2$ 4. $A = \ln 25$ et $B = 2\ln 5$

Correction

1. $A = \ln 10$ et $B = \ln 9$ donc $A > B$ 3. $A = \ln 8$ et $B = \ln 9$ donc $A < B$
2. $A = \ln 4$ et $B = \ln 3$ donc $A > B$ 4. $A = B$

Exercice 4. Calculer les nombres réels suivants.

1. $\ln(0,5) + \ln 2$ 2. $3\ln 2 - \ln 4$ 3. $(\ln(e^3))^2$ 4. $e^{\ln 2 + \ln 3}$

Correction

1. $\ln(0,5) + \ln 2 = 0$ 3. $(\ln(e^3))^2 = 9$
2. $3\ln 2 - \ln 4 = \ln 2$ 4. $e^{\ln 2 + \ln 3} = 6$

Exercice 5. Exprimer les nombres suivants sous forme d'un entier ou d'un inverse entier.



1. $A = e^{2\ln 3}$

2. $B = e^{4\ln 2}$

3. $C = e^{-\ln 4}$

4. $D = e^{-5\ln 2}$

Correction

1. $A = e^{2\ln 3} = 9$

2. $B = e^{4\ln 2} = 16$

3. $C = e^{-\ln 4} = \frac{1}{4}$

4. $D = e^{-5\ln 2} = \frac{1}{32}$

Exercice 6. Simplifier au maximum les expressions suivantes :

1. $A = e^{\ln 6 - 2\ln 3}$

2. $B = e^{3\ln 2 - \ln 4 + 1}$

3. $C = \frac{e^{\ln 5 - 1}}{e^{2 + \ln 5}}$

4. $D = \frac{e^{2\ln 3 - \ln 2}}{e^{-3\ln 2}}$

Correction

1. $A = e^{\ln 6 - 2\ln 3} = \frac{e^{\ln 6}}{e^{\ln(3^2)}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

3. $C = \frac{e^{\ln 5 - 1}}{e^{2 + \ln 5}} = e^{-3}$

2. $B = e^{3\ln 2 - \ln 4 + 1} = 2e$

4. $D = \frac{e^{2\ln 3 - \ln 2}}{e^{-3\ln 2}} = \frac{e^{2\ln 3} \times e^{3\ln 2}}{e^{\ln 2}} = \frac{3^2 \times 2^3}{2} = 36$

Exercice 7. Exprimer chacun des nombres suivants sous la forme $\ln c$ où c est un réel strictement positif.

1. $A = 2\ln 5 + \ln 3$

2. $B = 3\ln 3 - 2\ln 2$

3. $C = -\ln 5 + 3\ln 2$

4. $D = 3\ln 4 - 3\ln 2$

Correction

1. $A = 2\ln 5 + \ln 3 = \ln 75$

3. $C = -\ln 5 + 3\ln 2 = \ln\left(\frac{8}{5}\right)$

2. $B = 3\ln 3 - 2\ln 2 = \ln\left(\frac{27}{4}\right)$

4. $D = 3\ln 4 - 3\ln 2 = \ln 8$

Exercice 8. Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 2$.

1. $\ln 8$

2. $\ln(\sqrt{2})$

3. $\ln\left(\frac{1}{4}\right)$

4. $3\ln 2 - \ln 16$

Correction

1. $\ln 8 = 3\ln 2$

3. $\ln\left(\frac{1}{4}\right) = -2\ln 2$

2. $\ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\ln 2$

4. $3\ln 2 - \ln 16 = -\ln 2$

Exercice 9. Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$.

1. $\ln 20$

2. $\ln 100$

3. $\ln\left(\frac{4}{25}\right)$

4. $\ln \sqrt{10}$

Correction

1. $\ln 20 = 2\ln 2 + \ln 5$

3. $\ln\left(\frac{4}{25}\right) = 2\ln 2 - 2\ln 5$

2. $\ln 100 = 2\ln 2 + 2\ln 5$

4. $\ln \sqrt{10} = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 5$



II Équations

Exercice 10. Résoudre les équations suivantes.

1. $e^x = 2$

2. $e^x = -5$

3. $e^x = \frac{1}{4}$

Correction

1. $S = \{\ln 2\}$

2. $S = \emptyset$

3. $S = \{-\ln 4\}$

Exercice 11. Résoudre les équations suivantes.

1. $\ln x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

3. $\ln x = -\ln 9$

5. $\ln x = -1$;

2. $\ln x = \frac{\ln 5}{2}$

4. $\ln x = 2$;

6. $3\ln x - 9 = 0$.

Correction

1. $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

3. $S = \left\{\frac{1}{9}\right\}$

5. $S = \left\{\frac{1}{e}\right\}$

2. $S = \{\sqrt{5}\}$

4. $S = \{e^2\}$

6. $S = \{e^3\}$

Exercice 12. Résoudre les équations suivantes.

1. $(\ln x - 2)(1 + \ln x) = 0$

2. $(e^x - 3)(e^x + 5) = 0$

3. $(\ln x)(6 - 3\ln x) = 0$

Correction

1. $S = \left\{\frac{1}{e}; e^2\right\}$

2. $S = \{\ln 3\}$

3. $S = \{1; e^2\}$

Exercice 13. Résoudre les équations suivantes :

1. $2 + 3\ln x = 14$;

2. $\ln(x^2) = \ln 9$;

3. $e^{2-3x} = 5$;

4. $2e^{2x} - 10 = 0$.

Correction

1. Pour tout $x > 0$,

$$2 + 3\ln x = 14 \iff 3\ln x = 12 \iff \ln x =$$

$$4 \iff x = e^4$$

$$\mathcal{S} = \{e^4\}$$

2. Pour tout $x \neq 0$,

$$\ln(x^2) = \ln 9 \iff x^2 = 9 \iff x = -3 \text{ ou } x =$$

$$3$$

$$\mathcal{S} = \{-3; 3\}$$

3. Pour tout réel x , $e^{2-3x} = 5 \iff 2 - 3x =$
 $\ln 5 \iff x = \frac{2 - \ln 5}{3}$

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{2 - \ln 5}{3}\right\}$$

4. Pour tout réel x ,

$$2e^{2x} - 10 = 0 \iff e^{2x} = 5 \iff 2x = \ln 5 \iff$$

 $= \frac{\ln 5}{2}$

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\ln 5}{2}\right\}$$



Exercice 14. Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln(2-x) + 1 = 0$;

2. $\ln x + \ln(x-1) = \ln 5$;

3. $\ln(3x) - \ln(1-x) = \ln 2$.

Correction

1. Pour tout $x < 2$,

$$\ln(2-x) + 1 = 0 \iff \ln(2-x) = -1$$

$$\iff 2-x = e^{-1}$$

$$\iff x = 2 - e^{-1}$$

$$\mathcal{S} = \{2 - e^{-1}\}$$

2. Pour tout $x > 1$,

$$\ln x + \ln(x-1) = \ln 5 \iff \ln(x(x-1)) = \ln 5$$

$$\iff x(x-1) = 5$$

$$\iff x^2 - x - 5 = 0$$

Ce trinôme a pour discriminant :

$$\Delta = (-1)^2 - 4(-5) = 21$$

$$\text{Il y a deux racines : } x_1 = \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \text{ et } x_2 =$$

$$\frac{1 + \sqrt{21}}{2}$$

$$\frac{1 - \sqrt{21}}{2} \text{ ne convient pas}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \right\}$$

3. Pour tout $x \in]0; 1[$,

$$\ln(3x) - \ln(1-x) = \ln 2$$

$$\iff \ln(3x) = \ln(2(1-x))$$

$$\iff 3x = 2 - 2x$$

$$\iff 5x = 2$$

$$\iff x = \frac{2}{5}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{2}{5} \right\}$$

Exercice 15 (Changement de variable). 1. Résoudre l'équation $X^2 - 2X - 15 = 0$.

2. En déduire les solutions des équations suivantes :

(a) $e^{2x} - 2e^x - 15 = 0$;

(b) $(\ln x)^2 - 2\ln x - 15 = 0$.

Correction

1. $e^{2x} - 2e^x - 15 = 0$. On pose $X = e^x$.

$$\text{On a } X^2 = (e^x)^2 = e^{2x}$$

$$\text{On obtient l'équation } X^2 - 2X - 15 = 0.$$

$$e^{2x} - 2e^x - 15 = 0 \text{ équivaut à :}$$

$$\underbrace{e^x = -3}_{\text{impossible}} \text{ ou } e^x = 5$$

$$x = \ln 5$$

$$\mathcal{S} = \{\ln 5\}$$

2. $(\ln x)^2 - 2\ln x - 15 = 0$

$$\text{Pour tout } x > 0, \text{ on pose } X = \ln x.$$

$$\text{On obtient l'équation } X^2 - 2X - 15 = 0.$$

$$X = -3 \text{ ou } X = 5$$

$$\ln x = -3 \text{ ou } \ln x = 5$$

$$x = e^{-3} \text{ ou } x = e^5$$

$$\mathcal{S} = \{e^{-3}; e^5\}$$

Exercice 16. Résoudre les équations suivantes :

1. $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$

2. $2(\ln x)^2 + 5\ln x - 3 = 0$

Correction

1. $\mathcal{S} = \{0; \ln 3\}$

2. $\mathcal{S} = \{e^{-3}; \sqrt{e}\}$



III Inéquations

Exercice 17. Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\ln(x) \geq 1$

2. $\ln(x) > -2$

3. $\ln(x) \leq \frac{1}{2}$

4. $\ln(x) < 3$

Correction

1. $S = [e; +\infty[$

2. $S =]e^{-2}; +\infty[$

3. $S =]0; \sqrt{e}]$

4. $S =]0; e^3[$

Exercice 18. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\ln(2 - 3x) \geq 0;$

2. $\ln(1 - x) < 1;$

3. $\ln\left(\frac{3}{x}\right) > \ln 3.$

Correction

1. $S = \left] -\infty; \frac{1}{3} \right]$

2. $S =]1 - e; 1[$

3. $S =]0; 1[$

Exercice 19. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $2\ln(x) \geq \ln(2 - x);$

2. $\ln(x) + \ln(2x + 5) \leq \ln 3;$

3. $\ln(4x) - \ln 2 < 2\ln 4.$

Correction

1. $\mathcal{S} = [1; 2[$

2. $\mathcal{S} = \left] 0; \frac{1}{2} \right]$

3. $\mathcal{S} =]0; 8[$

Exercice 20. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $e^x > 3$

4. $2e^x - 3 > 9$

7. $\ln(-2x + 1) \leq 0$

2. $e^x \leq \frac{1}{2}$

5. $4e^x - 1 \geq e^x + 5$

8. $\ln\left(\frac{3x-1}{x+2}\right) \geq 0$

3. $e^x < -e$

6. $e^{2x} - 5e^x < 0$

9. $\ln(2x - 1) + 1 > 0$

Correction

1. $\mathcal{S} =]\ln 3; +\infty[$

4. $\mathcal{S} =]\ln 6; +\infty[$

7. $\mathcal{S} = \left[0; \frac{1}{2} \right]$

2. $\mathcal{S} = \left] -\infty; \ln\left(\frac{1}{2}\right) \right]$

5. $\mathcal{S} = [\ln 2; +\infty[$

8. $\mathcal{S} =]-\infty; -2[\cup [1, 5; +\infty[$

3. $\mathcal{S} = \emptyset$

6. $\mathcal{S} =]-\infty; \ln 5[$

9. $\mathcal{S} = \left] \frac{e+1}{2e}; +\infty \right[$

Exercice 21. Dans chacun des cas suivants, en utilisant la fonction $\ln$, déterminer le plus petit entier naturel n tel que :



1. $(0,7)^n \leq 10^{-2}$;
2. $(1,05)^n > 10$;
3. $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-7}$;
4. $(0,98)^{n-1} < 0,6$.

Correction

1. $n = 13$
2. $n = 48$
3. $n = 15$
4. $n = 27$

Exercice 22. Un enquêteur effectue un sondage par téléphone. La probabilité que le correspondant décroche et accepte de répondre à l'enquête est de $\frac{1}{5}$.

Combien d'appels l'enquêteur doit-il passer au minimum, pour que la probabilité qu'au moins un correspondant réponde au sondage soit supérieure à 0,999 ?

Correction

Soit n le nombre d'appels effectués. La probabilité qu'aucun correspondant ne réponde est $\left(\frac{4}{5}\right)^n$. Celle qu'au moins un correspondant réponde est $1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

On résout l'inéquation :

$$1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n > 0,999 \iff n \geq \frac{\ln 0,001}{\ln 0,8}.$$

L'enquêteur doit passer au moins 31 appels.

IV Étude de fonction

Exercice 23. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln x$.

1. Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Pour tout réel $x > 0$, calculer $f'(x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f .
4. En déduire que f admet un minimum sur $]0; +\infty[$ que l'on précisera.

Correction

f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln x$.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
2. Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \ln x + 1$.

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	

3.

f est décroissante sur $\left]0; \frac{1}{e}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$

4. f admet un minimum sur $]0; +\infty[$ atteint en $x = \frac{1}{e}$. Ce minimum est égal à $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$



Exercice 24. Déterminer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

1. $f(x) = 3x + 5 - \ln x$
2. $f(x) = \ln x + x^4$
3. $f(x) = \frac{1}{x} + 4 \ln x$
4. $f(x) = (\ln x)(x + 1)$

Correction

Pour tout $x \in]0; +\infty[$.

$$1. f'(x) = 3 - \frac{1}{x}$$

$$2. f'(x) = \frac{1}{x} + 4x^3$$

$$3. f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x} = \frac{4x - 1}{x^2}$$

$$4. f'(x) = 1 + \frac{1}{x} + \ln x$$

Exercice 25. Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0; +\infty[$.

1. $f(x) = 5x - x \ln x$
2. $f(x) = \frac{3 - \ln x}{x}$
3. $f(x) = \frac{4}{\ln x}$

Correction

1. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = 4 - \ln x$

x	0	e^4	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -

$$4 - \ln x > 0 \iff 4 > \ln x \iff e^4 > x$$

f est croissante sur $]0; e^4]$ et décroissante sur $[e^4; +\infty[$.

2. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{\ln x - 4}{x^2}$

x	0	e^4	$+\infty$
$f'(x)$		-	0 +

$$\ln x - 4 > 0 \iff \ln x > 4 \iff x > e^4$$

f est décroissante sur $]0; e^4]$ et croissante sur $[e^4; +\infty[$.

3. Pour tout $x \in]0; 1[$, $f'(x) = -\frac{4}{x(\ln x)^2}$

$f'(x) < 0$ donc f est décroissante sur $]0; 1[$.

Exercice 26. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (d'unité graphique 2 cm).

1. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$.

(b) Dresser le tableau de variation de f .

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

3. Déterminer une équation de la tangente T au point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

4. Construire $\mathcal{C}$ et T .



Correction

1. (a) Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - (\ln x + 1)}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$.

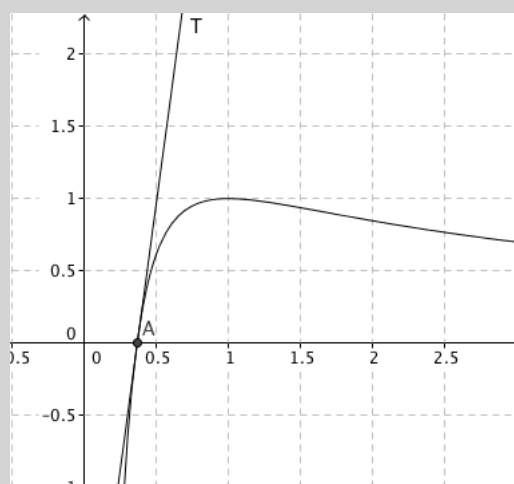
x	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	1	0	

(b)

2. Pour tout $x > 0$, $f(x) = 0 \iff \ln x = -1 \iff x = \frac{1}{e}$.

3. $T: y = f'\left(\frac{1}{e}\right)\left(x - \frac{1}{e}\right) + f\left(\frac{1}{e}\right)$.

$T: y = e^2 x - e$



Exercice 27. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (\ln x)^3 - 3\ln x$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{3(\ln x - 1)(\ln x + 1)}{x}$.

2. Dresser le tableau des variations de f .

3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

4. Construire $\mathcal{C}$ et son asymptote.



Correction

1. Pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = 3 \times \frac{1}{x} \times (\ln x)^2 - \frac{3}{x} = \frac{3(\ln x - 1)(\ln x + 1)}{x}.$$

x	0	e^{-1}	e	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

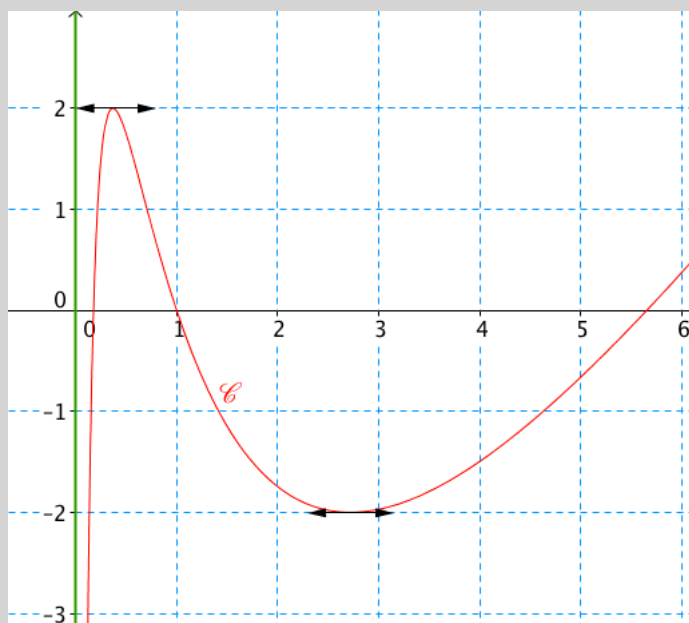
2.

3. $f(x) = 0 \iff \ln x((\ln x)^2 - 3) = 0$

$$f(x) = 0 \iff \ln x = 0 \text{ ou } (\ln x)^2 - 3 = 0$$

$$f(x) = 0 \iff x = 1 \text{ ou } \ln x = -\sqrt{3} \text{ ou } \ln x = \sqrt{3}$$

$$f(x) = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = e^{-\sqrt{3}} \text{ ou } x = e^{\sqrt{3}}$$



4.

V Fonction $\ln(u)$

Exercice 28. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes.

1. $f: x \mapsto \ln(5x - 3)$

3. $h: x \mapsto \ln(-7x)$

2. $g: x \mapsto \ln(-8x + 4)$

4. $k: x \mapsto \ln(x^2 - 2x + 1)$

Correction

1. $D_f = \left] \frac{3}{5}; +\infty \right[$

2. $D_g = \left] -\infty; \frac{1}{2} \right[$

3. $D_h =]-\infty; 0[$

4. $D_k = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Exercice 29. Dans chaque cas, calculer $f'(x)$ sur l'intervalle I.



1. $f(x) = \ln(5x - 1)$, $I = \left] \frac{1}{5}; +\infty \right[$

2. $f(x) = \ln(3x^2 - 5x + 7)$, $I = \mathbb{R}$

3. $f(x) = \ln(9 - x^2)$, $I =]-3; 3[$

4. $f(x) = \ln(1 + e^x)$, $I = \mathbb{R}$

Correction

1. $f'(x) = \frac{5}{5x-1}$

2. $f'(x) = \frac{6x-5}{3x^2-5x+7}$

=

3. $f'(x) = \frac{-2x}{9-x^2}$

4. $f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

Exercice 30. Soit f la fonction définie sur $\left] \frac{1}{3}; +\infty \right[$ par : $f(x) = \ln(3x - 1)$.1. Justifier que f est bien définie sur $\left] \frac{1}{3}; +\infty \right[$.2. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Interpréter graphiquement.3. Pour tout réel $x > \frac{1}{3}$, calculer $f'(x)$ et étudier son signe.4. Dresser le tableau de variation de la fonction f .**Correction**1. $3x - 1 > 0 \iff x > \frac{1}{3}$. Donc f est bien définie sur $\left] \frac{1}{3}; +\infty \right[$.2. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} f(x) = -\infty$ donc la courbe de f admet une asymptote d'équation $x = \frac{1}{3}$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.3. Pour tout réel $x > \frac{1}{3}$, $f'(x) = \frac{3}{3x-1}$

x	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$\parallel$	$+$

x	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

4.

Exercice 31. Soit f la fonction définie sur $] -4 ; 4[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{x+4}{4-x}\right)$.On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.1. Pour tout réel $x \in] -4 ; 4[$, comparer $f(-x)$ et $f(x)$. En déduire que $\mathcal{C}$ possède un élément de symétrie.2. Étude de f sur $[0 ; 4[$.(a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0 ; 4[$.(b) En déduire le sens de variation de f sur $[0 ; 4[$.(c) Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en 0.



(d) Calculer l'abscisse du point A de $\mathcal{C}$ d'ordonnée 1. En donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près.

3. Tracer précisément la courbe $\mathcal{C}$ en utilisant les résultats obtenus précédemment.

Correction

1. Pour tout réel $x \in]-4 ; 4[$,

$$f(-x) = \ln\left(\frac{-x+4}{4+x}\right) = -f(x).$$

$\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

2. Étude de f sur $[0 ; 4[$.

(a) Pour tout $x \in [0 ; 4[$, $f'(x) = \frac{8}{(4-x)(x+4)}$ donc $f'(x) > 0$.

(b) f est strictement croissante sur $[0 ; 4[$.

(c) La tangente en 0 a pour équation :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) \text{ soit } y = \frac{1}{2}x.$$

(d) $f(x) = 1 \iff \ln\left(\frac{x+4}{4-x}\right) = 1$

$$\iff \frac{x+4}{4-x} = e \iff x = \frac{4e-4}{1+e}.$$

L'abscisse du point A de $\mathcal{C}$ d'ordonnée 1 est $\frac{4e-4}{1+e}$ soit environ 1,85 à 10^{-2} près par excès.

VI Logarithmes et suites

Exercice 32. En 2015, la population d'une ville compte 250 000 habitants. Chaque année, cette population diminue de 2%. À partir de quelle année la population passera-t-elle au-dessous de 100 000 habitants ?

Correction

Chaque année, le nombre d'habitants est multiplié par 0,98. Au bout de n années la population s'élève à $250000 \times 0,98^n$. On résout l'inéquation :

$$250000 \times 0,98^n < 100000 \iff 0,98^n < 0,4$$

$$\iff \ln(0,98^n) < \ln(0,4)$$

$$\iff n \ln(0,98) < \ln(0,4)$$

$$\iff n > \frac{\ln(0,4)}{\ln(0,98)}$$

car $\ln(0,98) < 0$. Or $\frac{\ln(0,4)}{\ln(0,98)} \approx 45,4$.

La population passera au-dessous de 100 000 habitants à partir de la 46ème année.

Exercice 33 (Placement). Un capital est placé à intérêts composés au taux annuel de 3%. Au bout de combien d'années, ce capital aura-t-il plus que doublé ?

**Correction**

Chaque année, le capital est multiplié par 1,03.

On résout l'inéquation :

$$1,03^n > 2 \iff \ln(1,03^n) > \ln(2)$$

$$\iff n \ln(1,03) > \ln(2)$$

$$\iff n > \frac{\ln(2)}{\ln(1,03)} \text{ car } \ln(1,03) > 0.$$

Or $\frac{\ln(2)}{\ln(1,03)} \approx 23,5$.

Le capital aura plus que doublé à partir de la 24ème année.

Exercice 34. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n \geq 10^9$.

Correction

$$1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n \geq 10^9$$

$$\iff \frac{1 - 5^{n+1}}{1 - 5} \geq 10^9$$

$$\iff 5^{n+1} - 1 \geq 4 \times 10^9$$

$$\iff 5^{n+1} \geq 4 \times 10^9 + 1$$

$$\iff \ln(5^{n+1}) \geq \ln(4 \times 10^9 + 1)$$

$$\iff (n+1) \ln(5) \geq \ln(4 \times 10^9 + 1)$$

$$\iff n \geq \frac{\ln(4 \times 10^9 + 1)}{\ln(5)} - 1.$$

Or $\frac{\ln(5)}{\ln(4 \times 10^9 + 1)} - 1 \approx 12,73$.

Le plus petit entier n qui convient est $n = 13$.

Exercice 35. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{2}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

(a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_n et u_n en fonction de n .

(c) En déduire la limite de la suite (u_n) .

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $w_n = \ln(v_n)$.

(a) Montrer que la suite (w_n) est bien définie.

(b) Montrer que la suite (w_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer w_n en fonction de n .



Correction

1. (a) Pour tout
- $n \in \mathbb{N}$
- ,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{6} = \frac{1}{4}\left(u_n - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4}v_n.$$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{3}$.

- (b) Pour tout
- $n \in \mathbb{N}$
- ,

$$v_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ et } u_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{2}{3}.$$

- (c)
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$
- car
- $-1 < \frac{1}{4} < 1$
- d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{3}.$$

2. (a) Pour tout
- $n \in \mathbb{N}$
- ,
- $v_n > 0$
- donc la suite
- (w_n)
- est bien définie.

- (b) Pour tout
- $n \in \mathbb{N}$
- ,

$$w_n = \ln(v_n) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) + n \ln\left(\frac{1}{4}\right).$$

Donc,

$w_{n+1} - w_n = (n+1) \ln\left(\frac{1}{4}\right) - n \ln\left(\frac{1}{4}\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$. La suite (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\ln 4$ et de premier terme $w_0 = -\ln 3$.

- (c) Pour tout
- $n \in \mathbb{N}$
- ,
- $w_n = -\ln 3 - n \ln 4$
- .