Fonction logarithme népérien

Histoire des mathématiques

John Napier, plus connu en France sous le nom de Neper, est né en 1550 près d'Edimbourg (Écosse) et est mort en 1617 au château de Merchiston. Il grandit dans une famille aisée. Il a étudié à l'université de St-Andrews, où il fût disciple de John Rutherford. Il se prit de passion pour les mathématiques et s'intéressa aussi à la théologie et à l'astronomie.

En mathématiques, il a inventé les logarithmes dont l'objectif est de simplifier les calculs de trigonométrie sphériques nécessaires en astronomie et en navigation. Les logarithmes en transformant les multiplications et divisions respectivement en addition et soustraction simplifient considérablement les calculs qui à l'époque étaient très longs à faire puisqu'il n'y avait pas de calculatrices.

Neper est l'inventeur, en 1617, des "bâtons de Napier". Il s'agit d'un plateau comprenant des réglettes qui permettent d'effectuer mécaniquement des multiplications et des divisions.

I Fonction logarithme népérien

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, e^x est un nombre réel strictement positif. Inversement, étant donné un réel a strictement positif, existe-t-il un nombre x tel que $e^x = a$?

La propriété suivante répond à cette question.

Propriété : Solution de l'équation de l'équation $e^x = a$

Pour tout réel $a \in]0;+\infty[$, l'équation $e^x = a$ possède une unique solution.

Définition : Logarithme népérien

On note cette solution $\ln(a)$ ou $\ln a$. C'est le **logarithme népérien** de a.

<u>Démonstration :</u>

Soit $a \in]0;+\infty[$.

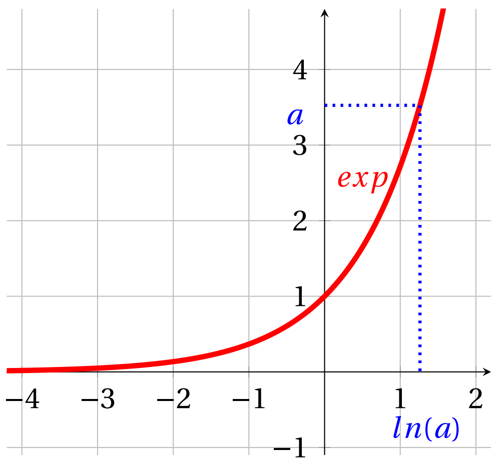
La fonction e^p est ....

et strictement .... sur $\mathbb{R}$.

De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = ...$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = ...$

Ainsi d'après le théorème ....,

il existe un unique $x \in]......;..........[$ tel que $e^x = ...$



Définition : Fonction $\ln$

La fonction $\ln$ est la fonction qui a tout $x>0$ associe le réel $\ln x$.

Exemple : D'après la calculatrice $\ln(0,8) \approx -0,223$; $\ln(2,5) \approx 0,916$.

Propriété : Conséquence

Pour tout réel $a>0$ et pour tout réel b, on a l'équivalence $\ln a = b \Longleftrightarrow a = ...$

Propriété : Valeurs particulières

$\ln(1) = ...$ $\qquad$ $\ln(.....) = 1$

Démonstrations : $e^{.....} = ...$ donc $\ln 1 = ...$ $\qquad$ $e^{.....} = ...$ donc $\ln ..... = 1$

Exemple : Résoudre l'équation $e^{3x-1} = 5$.

....

....

Propriété : Réciprocité

1. Pour tout réel $x>0$, $e^{\ln x} = ...$
2. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\ln\left(e^{x}\right) = ...$

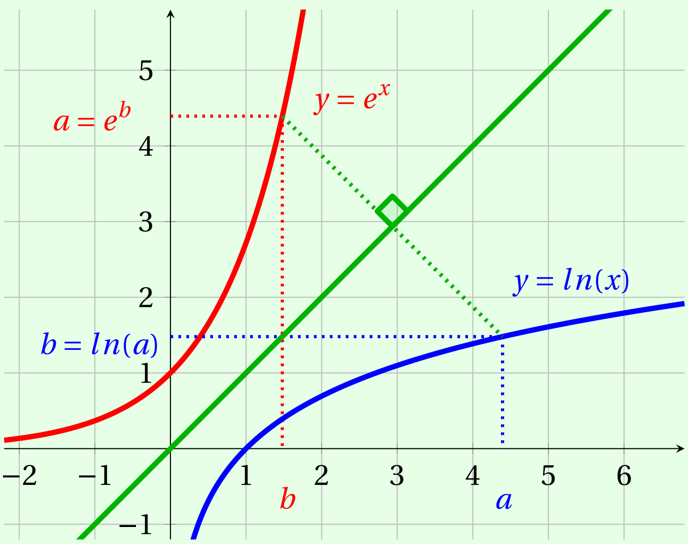
Démonstrations

1. Soit $x>0$. Par définition de $\ln x$, l'équation $e^{t} = x$ a pour solution .... Ainsi $e^{.........} = x$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition $\ln\left(e^{x}\right)$ est l'unique solution de l'équation ...., donc $\ln(..........) = x$.

Exemple : $\ln\left(e^{2}\right) = ...$ et $e^{\ln 2} = ...$

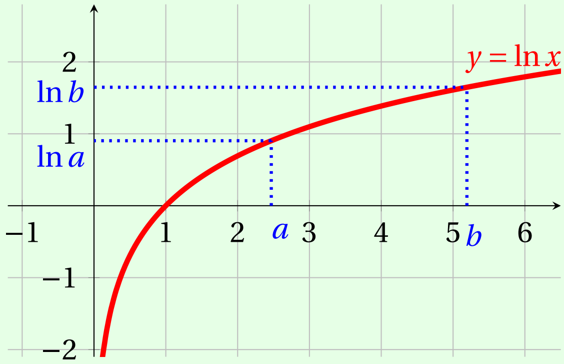
Propriété : Symétrie des courbes des fonctions $\ln$ et exp

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions $\ln$ et exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

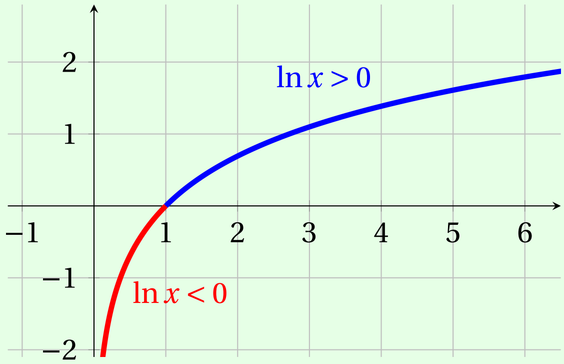


Propriété : Sens de variation de $\ln$ et conséquences

1. La fonction $\ln$ est strictement .... sur $]0;+\infty[$.
2. Pour tous les réels $a>0$ et $b>0$,
   - $\ln a = \ln b \iff ..... = ...$
   - $\ln a < \ln b \iff a.....b$



3. En particulier, pour tout réel x, on a
   - $\ln x > 0 \iff$ ....
   - $\ln x < 0 \iff$ ....



Démonstration :

1. Soient a et b deux réels tels que $0<a<b$.
   On a $e^{\ln a} = ...$ et $e^{\ln b} = ...$ alors $e^{\ln a}.....e^{\ln b}$.

   Comme la fonction expenenitelle est strictement .... sur $\mathbb{R}$,

   On en déduit que $\ln a.....\ln b$.
2. Conséquence directe de 1.
3. $\ln x > 0 \iff \ln(x) > \ln(.....) \iff x > .....$

   et $\ln x < 0 \iff \ln x < .... \iff 0 < x < .....$

Méthode : Résoudre une équation du type $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$

Pour résoudre une équation du type $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$:

1. Condition d'existence : Rechercher l'ensemble E des réels x tels que $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$
2. Résolution : Résoudre dans E, l'équation $u(x) = v(x)$.
3. Conclusion : Conclure en faisant attention au domaine de définition

Exemple : Résoudre $\ln\left(x^2-9\right) = \ln(2x+6)$.

1. Condition d'existence : $\mathrm{E} =$ ....

   puisque $x^2-9>0 \iff (x..........)(x..........)>9 \iff x \in$ ....

   et $2x+6>0 \iff 2x>..... \iff x...........$

2. Résolution

   Soit $x \in \mathrm{E}$. $\ln\left(x^2-9\right) = \ln(2x+6) \iff$ .... $\iff$ ....

   On a $\Delta =$ ....

   Donc cette équation du second degré a ...... solutions : $x_1 =$ .... et $x_2 =$ ....

3. Conclusion

   Comme 5.....E et -3.....E donc $\mathscr{S} =$ ....

Méthode : Résoudre une inéquation avec $\ln$

Pour résoudre une équation du type $\ln(u(x)) < \ln(v(x))$:

1. Condition d'existence : Rechercher l'ensemble E des réels x tels que $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$
2. Résolution : Résoudre dans E, l'inéquation $u(x) < v(x)$.
3. Conclusion : Conclure en faisant attention au domaine de définition

Exemple : Résoudre l'inéquation $\ln(x+3) < \ln\left(\frac{18}{x}\right)$

1. Condition d'existence : $\mathrm{E} =$ ....

   On a $x+3>0 \iff x.......$ et $\frac{18}{x}>0 \iff x........$

   Donc l'équation doit être résolue dans $\mathrm{E} =$ ....

2. Résolution

   Soit $x \in \mathrm{E}$, $\ln(x+3) < \ln\left(\frac{18}{x}\right) \iff x+3........... \iff x^2+3x <$ .... car x.....0 $(x \in \mathrm{E})$.

   $\iff x^2+3x-18.....0.$

   sachant que le trinôme $x^2+3x-18$ a pour discriminant 81 et pour racines -6 et 3.

   On en déduit que $x^2+3x-18<0 \iff x \in$ ....

3. Conclusion

   Puisque $x \in \mathrm{E}$, on a $\mathscr{S} =$ ....

II Propriétés algébriques

Propriété : Relation fonctionnelle

Pour tous réels a et b strictement positifs, on a $\ln(ab) = \ln(a) ..... \ln(b)$

Démonstration :

Soient a et b deux réels strictement positifs.

On a $e^{\ln a} = ...$ et $e^{\ln b} = ...$ donc $ab = ... = e^{..............}$.

Comme $ab = e^{..............}$, on a $e^{\ln(ab)} = e^{..............}$ d'où $\ln(ab) = ...$

Propriété : Logarithme d'un inverse, d'un quotient

Pour tous réels a et b strictement positifs, on a

1. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = ...\ln(a)$
2. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a).....\ln(b)$

Démonstrations

1. Soit $a > 0$. On a $\ln(a).....\ln\left(\frac{1}{a}\right) = \ln\left(\frac{a}{a}\right) = \ln..... = ...$ d'où $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = ...$
2. Soient $a > 0$ et $b > 0$.

   On a $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(..... \times \frac{1}{b}\right) = ... + ... = ...$

Propriété : Logarithme d'une puissance, d'une racine carrée

Pour tous réel $a > 0$ et pour tout entier relatif n, on a

1. $\ln\left(a^n\right) = ...\ln(a)$
2. $\ln\left(\sqrt{a}\right) = ...\ln(a)$

Démonstrations

1. Soit $a > 0$. Faisons une démonstration par récurrence. On note pour tout $\mathscr{P}_n$: $\ln\left(a^n\right)$.
   (a) *Initialisation.* Pour $n = 0$, c'est clair car $\ln(.........) = \ln...... = ... = 0\ln(a)$.

   (b) *Hérédité.* Supposons que pour un certain $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathscr{P}_k$.

   Alors $\ln\left(a^k\right) = ...$

   Ainsi $\ln\left(a^{k+1}\right) = \ln\left(a^k........\right) = \ln\left(a^k\right) + ... = ... + ... = (k+1)\ln(a)$. C'est $\mathscr{P}_{k+1}$.

   On a donc l'implication $\mathscr{P}_k \Rightarrow \mathscr{P}_{k+1}$.

   (c) *Conclusion.* Par initialisation et hérédité, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln\left(a^n\right) = n\ln a$.
2. En particulier pour tout $a' > 0$, on a $......\ln\left(a'\right) = \ln\left(a'^2\right)$.

   Prenons $a' = \sqrt{a}$, cela donne $.....\ln(........) = \ln(...........)$ d'où $\ln(..........) = ...\ln(a)$

Exemple : Écrire chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 2$.

$A = 3\ln 2 + \ln 4 =$ ....

$B = \ln\left(\sqrt{8}\right) =$ ....

$C = \ln(20) - \ln(5) =$ ....

Exemple : Résoudre l'inéquation $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 0,01$ avec $n \in \mathbb{N}$

On a $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 0,01 \iff$ .... car la fonction $\ln$ est strictement .... sur $]0;+\infty[$.

Donc $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 0,01 \iff$ .....$\ln\left(\frac{1}{3}\right) \leq$ .... $\iff n$.......................... $\approx 4,19$ car $\ln\left(\frac{1}{3}\right) < 0$.

Ainsi l'ensemble des solutions est constitué de tous les entiers n................

III Étude de la fonction logarithme népérien

Propriété : Dérivée de la fonction $\ln$

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)=......$

Démonstration :

On admet que la fonction $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Pour tout $x>0$, on pose $f(x)=e^{\ln x}$.

La fonction $\ln$ étant dérivable sur $]0;+\infty[$, f est aussi dérivable sur $]0;+\infty[$.

On a pour tout $x>0$, $f'(x)=$ ....

Or $f(x)=e^{\ln x}=$ ..... donc $f'(x)=$ ......

On en déduit que $1=$ .... $=$ ....

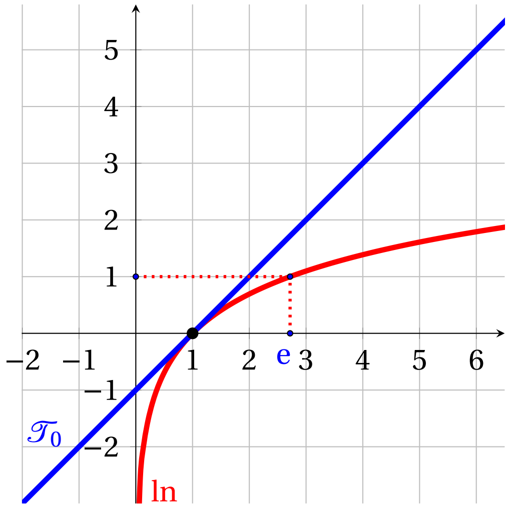
Ainsi pour tout $x>0$, $\ln'(x)=$ ......

Propriété : Limites aux bornes de la fonction $\ln$

On a donc le tableau de variation suivant pour la fonction $\ln$.

x	0		$+\infty$
$\ln x$	$\Vert$	$\nearrow$	

Exemple :La courbe de $\ln$ et sa tangente au point d'abscisse 1, positions relatives



1. Déterminer l'équation cartésienne réduite de la droite $\mathscr{T}_1$, tangente à la courbe de la fonction $\ln$ au point d'abscisse 1.

$(\mathscr{T}_1) : y =$ ....

Or $\ln'(1) =$ .... et $\ln 1 =$ ....

Donc $(\mathscr{T}_1) : y =$ ....

2. Étudier les positions relatives de la courbe de la fonction $\ln$ et de $\mathscr{T}_1$.

On pose pour tout $x > 0$, $g(x) = \ln(x) - (x - 1)$.

On a $g'(x) =$ ....

Comme $x > 0$, on en déduit que le signe de $g'(x)$ est celui de ....

Déterminons les variations de la fonction g.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖		0		
g	‖	↗		↘	

D'après le tableau de variation de g, on en déduit que pour tout $x > 0$, $x \neq 1$, $g(x) < 0$.

Donc la courbe de $\ln$ est située sous sa tangente pour tout $x > 0$.

IV Composition d'une fonction par $\ln$

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs strictement positives : $u : \mathrm{I} \longrightarrow]0;+\infty[$.

On note $\ln u$ la composée $\ln \circ u$, c'est-à-dire $\ln u : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie pour tout $x \in \mathrm{I}$, par $\ln u(x) = \ln \circ u(x) = \ln(u(x))$.

Propriété : Dérivée de $\ln u$

Si u est une fonction dérivable et à valeurs strictement positives sur un intervalle I, alors la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.
Ainsi u et $\ln u$ ont .... variations.

Démonstration :

On admet la première partie de la propriété, dans ce cas, on a $(\ln u)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Puisque pour tout $x \in \mathrm{I}$, $u(x)$............., le signe de $(lnu)'(x)$ et le même que celui de ....

Donc u et $\ln u$ ont .... variations.

Remarque : Si $f = \ln u$ sur un intervalle I, avant de calculer, on doit s'assurer que u est dérivable et .... sur I.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2+3\right)$. Calculer $f'(x)$.

On pose $u(x) = x^2 + 3$

u est .... et .... sur $\mathbb{R}$

On a $u'(x) = ...$

Ainsi f est .... sur $\mathbb{R}$

et $f'(x) = \dfrac{..........}{..........} = \dfrac{..............}{.............}$.

V Fonction logarithme décimal

Définition : Logarithme décimal

La fonction **logarithme décimal**, notée $\log$ est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

Propriété : Principales propriétés de $\log$

1. Pour tout entier relatif n, $\log\left(10^n\right) = n$
2. La fonction $\log$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
3. Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\log(ab) = \log a + \log b$ $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log a - \log b$

Remarque : Les logarithmes décimaux sont utiles, pour les mesures, notamment en chimie (pH), en acoustique (mesure du son en dB), en sismologie (mesure d'un séisme), en astronomie (magnitude apparente d'un astre)...
Les mesures concernées utilisent des **échelles logarithmiques**. Elles sont utilisées pour représenter des phénomènes pouvant varier par exemple de 10^{-10} à 10^{10}.
Elles permettent d'amplifier les variations des valeurs proches de 0 et de rendre moins importantes les variations pour les grands nombres, en mettant en évidence plutôt les variations relatives.
Avec l'échelle logarithmique, deux graduations dont le rapport vaut 10 sont à distance constante.