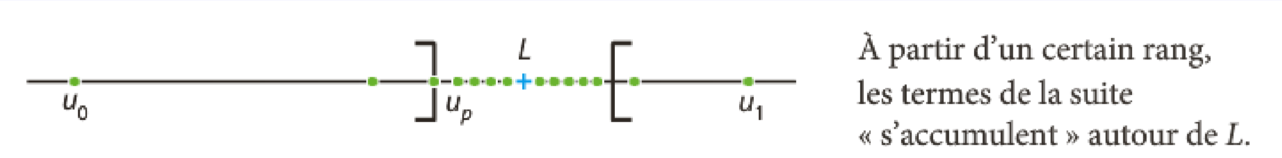
Limites de suites

AP : Activité A2 : Introduire la définition de limite d'une suite (page 14)

I Limite d'une suite

Définition 1 : Limite finie d'une suite

Dire qu'une suite (u_n) a pour limite un réel l signifie que tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.



On écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$

On dit que la suite **converge** vers l .

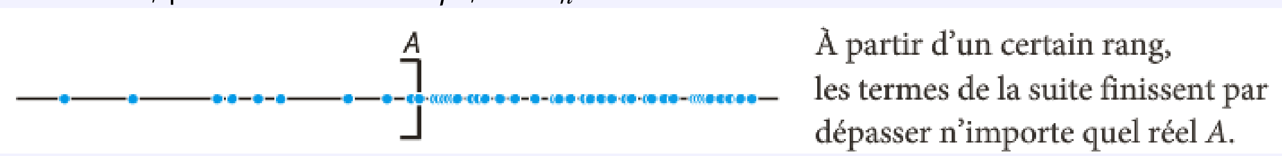
Remarque :

- Lorsqu'elle existe, la limite l est unique.
- Si une suite (u_n) ne converge pas, on dit qu'elle diverge.

Définition 2 : Limite infinie d'une suite

Dire qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ ou que la suite diverge vers $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]\mathrm{A};+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang p.

C'est-à-dire, pour tout entier $n \geq p$, $u_n > \mathrm{A}$.



On écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

De la même façon, on définit que (u_n) tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ ou que la suite diverge vers $-\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $]-\infty;\mathrm{A}[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang p.

Remarque : Cette définition traduit l'idée que tous les termes u_n arrivent à dépasser tout nombre A aussi grand soit-il.

Remarque : **Une suite peut ne pas avoir de limite.**

Une suite qui est divergente n'admet pas nécessairement de limite infinie.

Par exemple, la suite de terme générale $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs -1 et 1 .

Elle n'admet donc pas de limite finie, ni infinie, Elle est donc divergente.

Limites de suites de référence

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Pour tout entier $k \geq 1$:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$

Démonstration : Montrons que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ Soit A un réel quelconque.

- Si $\mathrm{A} < 0$, alors pour tout entier $n \geq 1$, $n^2 > \mathrm{A}$, on prend $p = 1$
- Si $\mathrm{A} > 0$, alors pour tout entier $n > \sqrt{\mathrm{A}}$, on a $n^2 > \mathrm{A}$ car la fonction carré est croissante sur $\left]\sqrt{\mathrm{A}}; +\infty\right[$
  On prend N le plus petit entier tel que $p > \sqrt{\mathrm{A}}$ alors Pour tout entier $n \geq p$, on a $n^2 > \mathrm{A}$
  Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

Limites et comparaison

(u_n) et (v_n) sont deux suites.

Si pout tout entier naturel $n \geq n_0$

- $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Démonstration :

Montrons que : $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Il s'agit de prouver que tout intervalle de la forme $]\mathrm{A}; +\infty[$ contient tous les termes de la suite (v_n) à partir d'un certain indice.

Soit A un nombre quelconque.

- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, l'intervalle $]\mathrm{A}; +\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang p .
- On sait aussi qu'à partir de $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$.

Notons N le plus grand des deux indices n_0 et p .

A partir de cet indice N , l'intervalle $]\mathrm{A}; +\infty[$ contient tous les termes u_n et donc tous les termes v_n .

Ceci est vrai pour tout A , donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Exemples :

- (u_n) est une suite telle que $u_n \geq n^2$ comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- Déterminer la limite suivante $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + (-1)^n$

  On sait que $(-1)^n \geq -1$ doù $n^2 + (-1)^n \geq n^2 - 1$

  Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + (-1)^n = +\infty$.

Théorème 1 : Théorème d'encadrement dit théorème des gendarmes (admis)

(u_n) , (v_n) et (w_n) sont trois suites.

Si pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n \leq w_n$

et si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite l

Alors la suite (v_n) converge vers l

Exemple :

- Déterminer la limite de la suite v_n tel que $\dfrac{1}{n^3} < v_n < \dfrac{1}{n^2}$

  Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$

  D'après le "théorème des gendarmes"

  On obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

- Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{sin(n)}{n}\right)$

  On sait que : $-1 \leq sin(n) \leq 1$

  Alors $-\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{sin(n)}{n} \leq \dfrac{1}{n}$

  Or $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

  Donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{sin(n)}{n} = 0$

  Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{sin(n)}{n}\right) = 1$

II Opérations et limites

On considère deux suites (u_n) et (v_n) et L et L' deux nombres réels.

II.1 Somme de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) =$	$\mathrm{L}+\mathrm{L}'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.$*$

$*$ *Forme indéterminée :* On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

Exemples :

- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(56+n^3\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\text{On sait que } \lim\limits_{n\to+\infty} 56 = 56 \\ \text{et } \lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{d'après la règle sur la limite d'une somme} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(56+n^3\right) = +\infty\end{array}$$

- Détermine $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2+n\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\text{On sait que } \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \\ \text{et } \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{d'après la règle sur la limite d'une somme} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2+n\right) = +\infty\end{array}$$

II.2 Produit de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	$\mathrm{L}>0$	$\mathrm{L}<0$	$\mathrm{L}>0$	$\mathrm{L}<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ $ou -\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) =$	$\mathrm{L}\times\mathrm{L}'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Exemples :

- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-n^2\sqrt{n}\right)$

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

d'après la règle sur la limite d'un produit $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-n^2\sqrt{n}\right) = -\infty$

- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - 1\right)\left(n^2+3\right)$

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} - 1 = -1$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + 3 = +\infty$

d'après la règle sur la limite d'un produit $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} + 1\right)\left(n^2+3\right) = -\infty$

II.3 Quotient de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	$L > 0$	$L < 0$	$L > 0$	$L < 0$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$L' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 avec $v_n > 0$	0 avec $v_n > 0$	0 avec $v_n < 0$	0 avec $v_n < 0$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} =$	$\dfrac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$L' > 0$	$L' < 0$	$L' > 0$	$L' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} =$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Exemples :

- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{3n+5}$

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 = 2$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n+5 = +\infty$

d'après la règle sur la limite d'un quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{3n+5} = 0$

- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{3+\frac{1}{n}}$

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 + \dfrac{1}{n} = 3$

d'après la règle sur la limite d'un quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{3+\frac{1}{n}} = +\infty$

Remarques :

Tous ces résultats sont intuitifs.

On retrouve par exemple, un principe sur les opérations de limite semblable à la règle des signes établie sur les nombres relatifs.

II.4 Forme indéterminée

Il est important cependant de reconnaître les **formes indéterminées** pour lesquelles il faudra utiliser des calculs algébriques afin de lever l'indétermination ou utiliser d'autres propriétés sur les calculs de limites.

Les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture :"$\infty-\infty$" , "$0\times\infty$" , "$\dfrac{\infty}{\infty}$" et "$\dfrac{0}{0}$"

Attention, ces écritures ne doivent pas être utilisées dans une rédaction.

Méthode pour lever une indétermination

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n-3\sqrt{n}\right)$ 2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5n^2+4}{4n^2+3n}$ 3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n^2+n}{n+3}$ 4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n-3\sqrt{n}\right)$

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\sqrt{n}=+\infty$

D'après la règle sur la limite d'une somme, il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\infty-\infty$"

Il faut donc penser à factoriser $n-3\sqrt{n}=n\left(1-\dfrac{3\sqrt{n}}{n}\right)=n\left(1-\dfrac{3}{\sqrt{n}}\right)$

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3}{\sqrt{n}}=0$ doù $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\dfrac{3}{\sqrt{n}}=1$

D'après la règle sur la limite d'un produit $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1-\dfrac{3}{\sqrt{n}}\right)=+\infty$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n-3\sqrt{n}\right)=+\infty$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5n^2+4}{4n^2+3n}$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 5n^2+4=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n^2+3n=+\infty$

D'après la règle sur la limite d'une somme, il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\dfrac{\infty}{\infty}$"

Il faut donc penser à factoriser $\dfrac{5n^2+4}{4n^2+3n}=\dfrac{n^2\left(5+\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(4+\frac{3n}{n^2}\right)}=\dfrac{5+\frac{4}{n^2}}{4+\frac{3}{n}}$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 5+\dfrac{4}{n^2}=5$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 4+\dfrac{3}{n}=4$

D'après la règle sur la limite d'un quotient

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5+\frac{4}{n^2}}{4+\frac{3}{n}}=\dfrac{5}{4}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5n^2+4}{4n^2+3n}=\dfrac{5}{4}$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^2+n}{n+3}$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2+n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n+3=+\infty$

D'après la règle sur la limite d'une somme, il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\dfrac{\infty}{\infty}$"

Il faut donc penser à factoriser $\dfrac{3n^2+n}{n+3}=\dfrac{n^2\left(3+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)}=n\dfrac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n\dfrac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}=+\infty$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3+\dfrac{1}{n}=3$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{3}{n}=1$

Par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}=3$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^2+n}{n+3}=+\infty$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+2}=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}=+\infty$

D'après la règle sur la limite d'une somme, il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\infty-\infty$"

Il faut donc penser à multiplier par l'expression conjuguée.

$$\sqrt{n+2}-\sqrt{n}=\frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\frac{\left(\sqrt{n+2}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 2=2$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+2}=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}=+\infty$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+2}+\sqrt{n}=+\infty$

par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)=0$

II.5 Limite d'une suite géométrique

Théorème 2 : Limite d'une suite géométrique

On considère un réel q .

La suite (q^n) des puissances de q converge si et seulement si $-1 < q \leq 1$.

On a :

- Si $q > 1$, alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- Si $q = 1$, alors la suite (q^n) est constante, de limite 1
- Si $-1 < q < 1$, alors la suite (q^n) converge vers zéro : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
- Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) diverge et n'admet pas de limite

<u>Démonstration :</u>

- On suppose que $q > 1$

  On pose $q = 1 + a$ avec $a > 0$.

  D'après l'inégalité de Bernoulli : $(1+a)^n \geq 1 + na$

  Ainsi $q^n = (1+a)^n \geq 1 + na$, pour tout entier naturel n

  Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + na = +\infty$

  D'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

- On suppose que $-1 < q < 1$

  - pour $q = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
  - pour $0 < q < 1$, on a $\dfrac{1}{q} > 1$

    alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{q}\right)^n = +\infty$ d'où alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{q^n} = +\infty$

    Ainsi par passage à l'inverse $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

  - pour $-1 < q < 0$,

    On pose $p = |q|$

    Alors $0 < p < 1$

    Doù $\lim\limits_{n\to+\infty} p^n = 0$ daprès la démonstration précendente

    Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |q|^n = 0$

    Doù $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

- On suppose que $q \leq -1$

  les valeurs de q^n appartiennent alternativement à $]-\infty;-1]$ et $[1;+\infty[$ selon la parité de n

  donc la suite (q^n) n'a pas de limite.

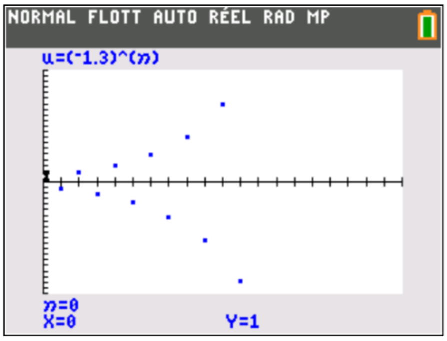
Exemples :

- Soit (u_n) la suite géométrique de raison 2 et de premier terme -3 , alors $\forall n \in \mathrm{N}$, $u_n = -3 \times 2^n$

  Comme $2 > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$
  Et en multipliant par $-3 < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} -3 \times 2^n = +\infty$
  Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

- Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = (-1{,}3)^n$

  Cette suite n'a pas de limite.



- Déterminer la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-2)^n}{3}$

  $\left((-2)^n\right)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison -2
  Comme $-2 \leq -1$ alors $(-2)^n$ ne possède pas de limite.
  Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-2)^n}{3}$ n'existe pas.

- Déterminer la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} (2^n - 3^n)$

  On a $2^n - 3^n = 3^n\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 1\right)$
  $\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$
  Comme $-1 \leq \dfrac{2}{3} \leq 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ doù $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 1 = -1$
  Et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ car (3^n) est une suite géométrique de raison 3 et $3 > 1$
  Donc par limite d'un produit $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 1\right) = -\infty$
  Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (2^n - 3^n) = -\infty$.

- Déterminer la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$

  On reconnaît les n premiers termes d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme 1 .

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$ comme limite d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=1$

Doù $\lim\limits_{n\to+\infty}2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)=2$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)=2$.