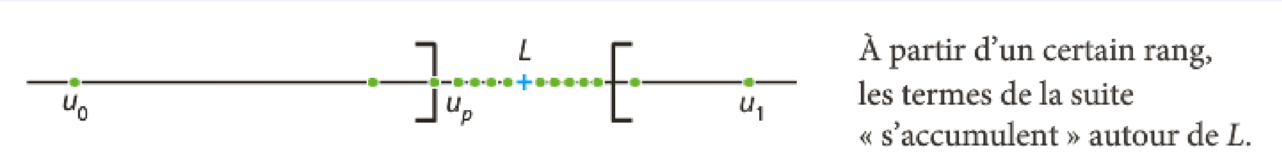
Limites de suites

I Limite d'une suite

Définition 1 : Limite finie d'une suite

Dire qu'une suite (u_n) a pour limite un réel l signifie que tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.



On écrit $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$

On dit que la suite .... vers l .

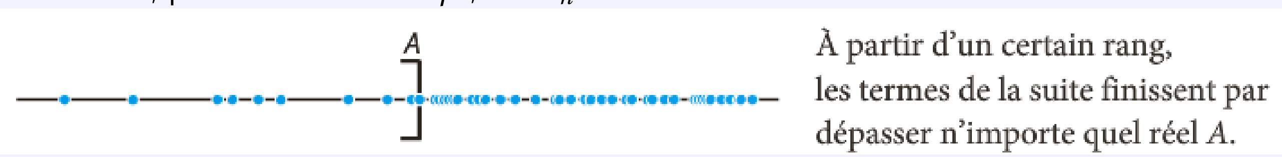
Remarque :

- Lorsqu'elle existe, la limite l est ....
- Si une suite (u_n) ne converge pas, on dit qu'elle ....

Définition 2 : Limite infinie d'une suite

Dire qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ ou que la suite diverge vers $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]A;+\infty[$ contient .... les termes de la suite à partir d'un .... rang p.

C'est-à-dire, pour tout entier $n \geq p$, $u_n > A$.



On écrit $\lim_{n \to +\infty} u_n =$.........

De la même façon, on définit que (u_n) tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ ou que la suite diverge vers $-\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $]-\infty;A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang p.

Remarque : Cette définition traduit l'idée que tous les termes u_n arrivent à dépasser tout nombre A aussi ....

Remarque : **Une suite peut ne pas avoir de limite.**

Une suite qui est divergente n'admet pas nécessairement de limite infinie.

Par exemple, la suite de terme générale $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs .... et ....

Elle n'admet donc pas de limite finie, ni infinie,

Elle est donc ....

Limites de suites de référence

- $\lim\limits_{n \to +\infty} n =$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} =$ ....
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} =$ ....
- $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 =$ ....
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} =$ ....
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} =$ ....

Pour tout entier $k \geq 1$:
- $\lim\limits_{n \to +\infty} n^k =$ ....
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^k} =$ ....

Démonstration : Montrons que : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

Soit A un réel quelconque.

- Si $\mathrm{A} < 0$, alors pour tout entier $n \geq 1$, $n^2 > \mathrm{A}$, on prend $p = 1$
- Si $\mathrm{A} > 0$, alors pour tout entier $n > \sqrt{\mathrm{A}}$, on a $n^2 > \mathrm{A}$ car la fonction carré est croissante sur $\left]\sqrt{\mathrm{A}}; +\infty\right[$

  On prend p le plus petit entier tel que $p > \sqrt{\mathrm{A}}$, alors pour tout entier $n \geq p$, on a $n^2 > \mathrm{A}$

  Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

Limites et comparaison

(u_n) et (v_n) sont deux suites et si pout tout entier naturel $n \geq n_0$

- $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$ ....
- $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$ ....

Démonstration : Montrons que : $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Il s'agit de prouver que tout intervalle de la forme $]\mathrm{A}; +\infty[$ contient tous les termes de la suite (v_n) à partir d'un certain indice.

Soit A un nombre quelconque.

....

....

....

....

....

....

....

....

Exemple : Déterminer la limite suivante $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 + (-1)^n$

....

....

Théorème 1 : Théorème d'encadrement dit théorème des gendarmes (admis)

(u_n) , (v_n) et (w_n) sont trois suites.

Si pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n \leq w_n$

Et si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite l

Alors la suite (v_n) converge vers l

Exemple :

- Déterminer la limite de la suite v_n tel que $\dfrac{1}{n^3} < v_n < \dfrac{1}{n^2}$

....

....

....

....

....

....

....

- Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{sin(n)}{n}\right)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

II Opérations et limites

On considère deux suites (u_n) et (v_n) et L et L' deux nombres réels.

II.1 Somme de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) =$						

∗ *Forme indéterminée :* On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

Exemples :

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(56+n^3\right)$

. . . .

. . . .

. . . .

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2+n\right)$

. . . .

. . . .

. . . .

II.2 Produit de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	$\mathrm{L}>0$	$\mathrm{L}<0$	$\mathrm{L}>0$	$\mathrm{L}<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ $ou-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) =$									

Exemples :

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-n^2\sqrt{n}\right)$

. . . .

. . . .

. . . .

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-1\right)\left(n^2+3\right)$

. . . .

. . . .

. . . .

II.3 Quotient de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	$\mathrm{L}>0$	$\mathrm{L}<0$	$\mathrm{L}>0$	$\mathrm{L}<0$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$\mathrm{L}'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 avec $v_n>0$	0 avec $v_n>0$	0 avec $v_n<0$	0 avec $v_n<0$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} =$							

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$\mathrm{L}'>0$	$\mathrm{L}'<0$	$\mathrm{L}'>0$	$\mathrm{L}'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} =$					

Exemples :

- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{3n+5}$

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{3+\frac{1}{n}}$

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

Remarques :

Tous ces résultats sont intuitifs.

On retrouve par exemple, un principe sur les opérations de limite semblable à la règle des signes établie sur les nombres relatifs.

II.4 Forme indéterminée

Il est important cependant de reconnaître les **formes indéterminées** pour lesquelles il faudra utiliser des calculs algébriques afin de lever l'indétermination ou utiliser d'autres propriétés sur les calculs de limites.

Les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture :"$\infty - \infty$" , "$0 \times \infty$" , "$\dfrac{\infty}{\infty}$" et "$\dfrac{0}{0}$"

Attention, ces écritures ne doivent pas être utilisées dans une rédaction.

Méthode pour lever une indétermination

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n - 3\sqrt{n}\right)$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{5n^2+4}{4n^2+3n}$
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3n^2+n}{n+3}$
4. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right)$

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n - 3\sqrt{n}\right)$

....

....

....

....

....

....

....

....

2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{5n^2+4}{4n^2+3n}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^2+n}{n+3}$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

II.5 Limite d'une suite géométrique

Théorème 2 : Limite d'une suite géométrique

On considère un réel q .

La suite (q^n) des puissances de q converge si et seulement si $-1 < q \leq 1$.

On a :

- Si $q > 1$, alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$: $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- Si $q = 1$, alors la suite (q^n) est constante, de limite 1
- Si $-1 < q < 1$, alors la suite (q^n) converge vers zéro : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) diverge et n'admet pas de limite

<u>Démonstration :</u>

- On suppose que $q > 1$

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

- On suppose que $-1 < q < 1$
  - pour $q = 0$ alors ....
  - pour $0 < q < 1$, on a $\dfrac{1}{q} > 1$

    ....

    ....
  - pour $-1 < q < 0$,

    ....

    ....

    ....

    ....

    ....

- On suppose que $q \leq -1$

  ....

  ....

Exemples :

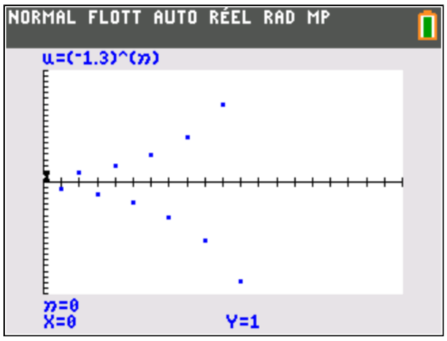
- Soit (u_n) la suite géométrique de raison 2 et de premier terme -3 , alors $\forall n \in \mathrm{N}$, $u_n = -3 \times 2^n$

  ....

  ....

  ....

- Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = (-1,3)^n$, elle ....



- Déterminer la limite : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(-2)^n}{3}$

  ....

  ....

  ....

- Déterminer la limite : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2^n - 3^n\right)$

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

- Déterminer la limite : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....