



Nom et prénom :

Exercice 1. On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 2 - \frac{2}{n}$.

1. Etudier les variations de la suite (u_n) .

Correction

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} - u_n = 2 - \frac{2}{n+1} - \left(2 - \frac{2}{n}\right)$$

$$u_{n+1} - u_n = 2 - \frac{2}{n+1} - 2 + \frac{2}{n}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1) - 2n}{n(n+1)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+1-2n}{n(n+1)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{n(n+1)}$$

Comme $2 > 0$, $n > 0$ et $n+1 > 0$, alors $\frac{2}{n(n+1)} > 0$

D'où $u_{n+1} - u_n > 0$

Donc la suite (u_n) est croissante.

2. Montrer que pour tout entier naturel non nul n , $u_n < 2$.

Correction

On sait que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $n > 0$

Alors $\frac{1}{n} > 0$ et $-\frac{1}{n} < 0$

D'où $2 - \frac{1}{n} < 2$

Donc pour tout entier naturel n , $u_n < 2$

3. Montrer que (u_n) converge.

Correction

D'après les question 1 et 2, on sait que la suite (u_n) est croissante et majorée par 2

En utilisant le théorème de convergence, on obtient que la suite (u_n) converge.



Exercice 2. Soient $A = \{1; 3; 5; 7\}$ et $B = \{2; 5\}$. Décrire les ensembles $A \cup B$, $A \cap B$ et $A \times B$.

Correction

- $A \cup B = \{1; 2; 3; 5; 7\}$
- $A \cap B = \{5\}$
- $A \times B = \{(1; 2); (1; 5); (3; 2); (3; 5); (5; 2); (5; 5); (7; 2); (7; 5)\}$

vérification : $\text{card}(A) \times \text{card}(B) = 4 \times 2 = 8$

Exercice 3. Pour accéder à un service sur Internet, vous devez taper un mot de passe de 4 lettres choisies dans l'alphabet latin majuscule (26 caractères) et de deux chiffres (10 caractères).

1. Combien de mots de passe peut-on créer?

Correction

Pour la première lettre : 26 choix possibles

Pour la seconde lettre : 26 choix possibles

Pour la troisième lettre : 26 choix possibles

Pour la quatrième lettre : 26 choix possibles

Pour le premier chiffre : 10 choix possibles

Pour le second chiffre : 10 choix possibles

Donc $26 \times 26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 = 26^4 \times 100 = 45697600$

Autre méthode :

$$\text{card}(A) = \text{card}(\{a; b; \dots; z\}^4 \times \{0; 1; \dots; 9\}^2) = \text{card}(\{a; b; \dots; z\})^4 \times 10 = 26^4 \times 10^2 = 45697600$$

On peut donc créer 45 697 600 mots de passe avec 4 lettres et deux chiffres.

2. Combien de mots de passe avec 4 lettres distinctes peut-on créer?

Correction

Pour la première lettre : 26 choix possibles

Pour la seconde lettre : 25 choix possibles

Pour la troisième lettre : 24 choix possibles

Pour la quatrième lettre : 23 choix possibles

Pour le premier chiffre : 10 choix possibles

Pour le second chiffre : 10 choix possibles

Donc $26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 10 \times 10 = 35880000$

On peut donc créer 35 880 000 mots de passe avec 4 lettres distinctes et deux chiffres.