



Dénombrement

Activité à projeter

I Rappel sur les ensembles

Définition 1 : Ensemble

Un ensemble est une collection d'objets qui présentent une ou plusieurs propriétés communes.

Soit E un ensemble, $x \in E$ signifie « x est un élément de E » ou « x appartient à E ».

On désigne par $\emptyset$ l'ensemble vide qui n'a aucun élément.

Définition 2 : Partie d'un ensemble

Soient E et A deux ensembles

A est une partie de l'ensemble E si tous les éléments de A appartiennent aussi à E ,

On dit que « A est sous ensemble de E » ou que « A est inclus dans E »

Notation : $A \subset E$

Exemple :

- $3 \in \mathbb{Z}$
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Définition 3 : Cardinal

Soit n un entier naturel

Lorsqu'un ensemble E a un nombre n fini d'éléments, on dit que E est un ensemble fini.

Le nombre n d'éléments de E est appelé cardinal de E , noté $\text{card}(E)$

Exemple :

- $A = \{a; b; c\}$ alors $\text{Card}(A) = 3$
- $\text{Card}(\emptyset) = 0$
- Certains ensembles ne sont pas finis : l'ensemble $\mathbb{N}$; l'ensemble des réels de l'intervalle $[0; 1]$

Remarques :

1. Une partie avec un seul élément s'appelle un singleton
2. Une partie avec deux éléments s'appelle une paire

Exemple :

On a $A = \{a; b; c\}$

Alors l'ensemble de toutes les parties de A , c'est-à-dire tous les sous-ensemble possibles de A sont :

$\emptyset ; \{a\} ; \{b\} ; \{c\} ; \{a; b\} ; \{a; c\} ; \{b; c\} ; \{a; b; c\}$



Définition 4 : Complémentaire

Soient A et E deux ensembles tel que $A \subset E$.

Le complémentaire de A dans E , noté $\bar{A}$, se lit « A barre », est l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A , c'est à dire : $x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \in E$ et $x \notin A$

Définition 5 : Réunion

Soient A et B deux ensembles.

La réunion de A et B , noté $A \cup B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B :

pour tout élément x de A ou B : $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B$

Définition 6 : Intersection

Soient A et B deux ensembles.

L'intersection de A et B , noté $A \cap B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A et à B :

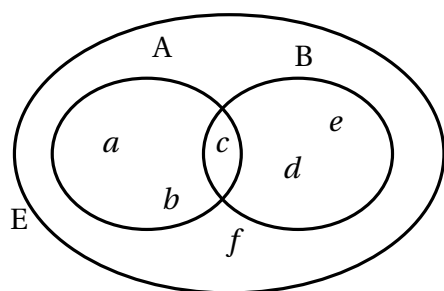
pour tout élément x de A et B : $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ et $x \in B$

Remarque :

Si deux événements A et B n'ont aucun résultat en commun, c'est à dire $A \cap B = \emptyset$

Alors A et B sont dits **disjoints** ou incompatibles

Exemple :



D'après le diagramme de Venn, on a les résultats suivants :

- $E = \{a; b; c; d; e; f\}$ alors $\text{Card}(E) = 6$
- $A = \{a; b; c\}$
- $B = \{c; d; e\}$
- $A \cup B = \{a; b; c; d; e\}$
- $A \cap B = \{c\}$
- $a \in A$
- $f \in E$ et $f \notin A$
- $A \subset E$
- $\{a; c\} \subset A$



II Dénombrement

1) Principe additif

Propriété : Principe additif

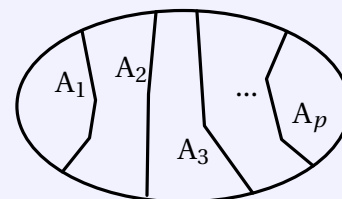
Le nombre d'éléments de la réunion deux ensembles A et B disjoint, respectivement de n et p éléments, est $n + p$

Autrement dit $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) = n + p$

Généralisation

Soient $A_1, A_2, \dots, A_p$ p ensembles finis deux à deux disjoints

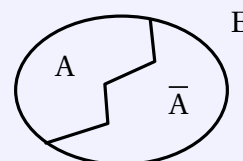
Alors $\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \dots + \text{Card}(A_p)$



Corollaire

Soient A une partie d'un ensemble E fini et $\bar{A}$ le complémentaire de A dans E

Alors $\text{Card}(\bar{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$



2) Principe multiplicatif

Définition et propriété : principe multiplicatif

E et F sont deux ensembles non vides

1. Le produit cartésien de E par F , noté $E \times F$ (se lit « E croix F ») est l'ensemble des couples $(x; y)$ avec $x \in E$ et $y \in F$
2. Lorsque les ensembles E et F sont finis, $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$

Remarque : les signes $\times$ ne désigne pas le même produit

1. dans $\text{Card}(E \times F)$: $\times$ symbolise le produit cartésien des ensembles E et F et se lit « croix »
2. dans $\text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$: $\times$ symbolise la multiplication de deux entiers et se lit « fois »

Exemple :

Soient $E = \{a; b; c\}$ et $F = \{1; 2\}$

Alors $E \times F = \{ (a; 1); (a; 2); (b; 1); (b; 2); (c; 1); (c; 2) \}$

Et $F \times E = \{ (1; a); (1; b); (1; c); (2; a); (2; b); (2; c) \}$



Généralisation

Soient p un nombre entier supérieur ou égale à 2 et $E_1, E_2, \dots, E_p$ p ensembles non vides

- Toute liste ordonnée $(x_1; x_2; \dots; x_p)$, avec $x_i \in E_i$ pour tout i allant de 1 à p , est appelée p -uplet (ou p -listes)
- L'ensemble de ces p -uplets est le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$
- Lorsque les ensembles $E_1, E_2, \dots, E_k$ sont finis :

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \dots \times \text{Card}(E_p)$$

Remarques :

- Un k -uplet s'écrit avec des parenthèses
- Un 2-uplet s'appelle un couple
- Un 3-uplet s'appelle un triplet
- L'ordre intervient donc $(a; b) \neq (b; a)$
- Les objets peuvent être identiques $(a; a)$ existe (il suffit de penser aux coordonnées)

Exemple :

On considère les ensembles $A = \{a\}$, $F = \{b; d\}$ et $G = \{a; b; c\}$. Déterminer $G \times A \times F$.

$$G \times A \times F = \{ (a; a; b); (a; a; d); (b; a; b); (b; a; d); (c; a; b); (c; a; d) \}$$

Cas particulier : p -uplets d'un ensemble à n éléments

Soient E un ensemble à n éléments et p un entier naturel non nul

Alors

- un p -uplet de E est un élément de E^p
- le nombre de p -uplets d'un ensemble E à n éléments est n^p
- $\text{Card}(E^p) = (\text{Card}(E))^p$

Exemple :

On considère l'ensemble $H = \{a; b; c; d\}$. Déterminer 2-uplets de H .

On a $(a; a); (a; b); (a; c); (a; d); (b; a); (b; b); (b; c); (b; d); (c; a); (c; b); (c; c); (c; d); (d; a); (d; b); (d; c); (d; d)$
 On sait qu'on n'en a pas oublié puisque le nombre de 2-uplets d'un ensemble H à 4 éléments est $4^2 = 16$

Exercice d'application :

Un immeuble est protégé par un digicode. Ce code peut être constitué de quatre, cinq ou six chiffres allant de 0 à 9, puis d'une lettre sélectionnée parmi les lettres A, B et C. Combien de code peut-on former avec ce système ?

On appelle E_1 ; E_2 et E_3 l'ensemble des mots de passe composé respectivement de 4, 5 et 6 chiffres et d'une lettre.

$$\text{Alors } \text{Card}(E_1) = \text{Card}(\{0; 1; \dots; 9\}^4 \times \{A; B; C\}) = 10^4 \times 3 = 30\ 000$$

$$\text{Card}(E_2) = \text{Card}(\{0; 1; \dots; 9\}^5 \times \{A; B; C\}) = 10^5 \times 3 = 300\ 000$$

$$\text{Card}(E_3) = \text{Card}(\{0; 1; \dots; 9\}^6 \times \{A; B; C\}) = 10^6 \times 3 = 3\ 000\ 000$$

$$\text{Et } 30\ 000 + 300\ 000 + 3\ 000\ 000 = 3\ 330\ 000$$

Il y a donc 3 330 000 codes possibles



Activité 3 page 337

III Permutation

Définition 7 : Permutation

On appelle **permutation** d'un ensemble E à n éléments **tous** les ordres possibles dans les n -uplets constitués des éléments de cet ensemble E .

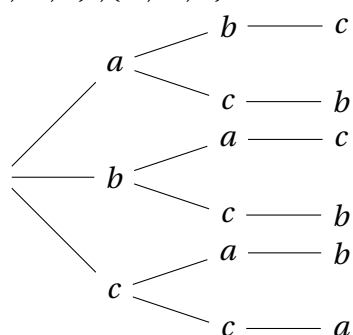
Remarque : une permutation de E est une **liste ordonnée** de tous les éléments de E pris **une fois et une seule**.

Exemple : On considère l'ensemble $G = \{a; b; c\}$. Déterminer l'ensemble des triplets possibles de G .

On cherche bien les 3-uplets constitués des 3 éléments de l'ensemble.

Tous les triplets possibles sont : $(a; b; c); (a; c; b); (b; a; c); (b; c; a);$

$(c; a; b); (c; b; a)$



Attention : $(a; b; a)$ et $(a; b)$ ne sont pas des permutations de G car elle ne contient pas tous les éléments de G .

Propriété : Nombre de permutations d'un ensemble à n éléments (admise)

Le nombre de permutation d'un ensemble à n éléments s'écrit $n!$, se lit « factorielle n » et est défini par

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

Démonstration :

On utilise un raisonnement par cases :

1^{er} élément	2^e élément	3^e élément	$\dots$	n^e élément
n possibilités	$\times (n-1)$ possibilités	$\times (n-2)$ possibilités	$\times \dots \times$	$(n-n+1)$ possibilités

On a n possibilités pour choisir le premier élément de la liste, puis $(n-1)$ choix possibles pour le deuxième élément, et ainsi de suite jusqu'au dernier élément pour lequel, on n'a plus qu'une seule possibilité.

Ainsi le nombre total de permutations est bien $n!$

Dans l'exemple précédent :

On a $G = \{a; b; c\}$

Alors le nombre de permutations avec un ensemble à 3 éléments est $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

**Propriété sur les factorielles**

- $0! = 1$
- $n! = n \times (n-1)!$
- $(n+1)! = (n+1) \times n!$

Exemples :

a) Dans combien d'ordre différents peut-on écouter 12 morceaux de musique ?

$$12 \times 11 \times \cdots \times 1 = 12! = 479\,001\,600$$

Il y a donc 479 001 600 ordres différents pour écouter 12 morceaux de musique

b) De combien de façons peut-on placer 6 personnes à une table de 6 ?

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6! = 720$$

Il y a 720 possibilités de placer les six personnes sur une table de 6



IV Arrangements

Définition 8 : Arrangement ou p-liste

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et p un entier vérifiant $1 \leq p \leq n$.

Un **arrangement** à p éléments de E est une **p-liste d'éléments deux à deux distincts de E (pas de répétition d'éléments)**.

Remarques :

- Un arrangement correspond à un choix **ordonné** (comme dans une p-liste) de p éléments deux à deux distincts.
- La définition d'un arrangement **exclut la répétition** d'un même élément.
- Par conséquent, il n'existe aucun arrangement à p éléments de E , lorsque p est strictement supérieur à n , cardinal de l'ensemble E .

Exemple :

Si $E = a ; b ; c ; d$ alors $(c ; a ; b)$ et $(b ; a ; c)$ sont deux arrangements différents à trois éléments de E .

En revanche $(a ; c ; a)$ n'est pas un arrangement car l'élément a est répété.

Théorème 1 : Nombre d'arrangement ou de p-uplets

Le **nombre d'arrangements** à p éléments ($1 \leq p \leq n$) d'un ensemble E de cardinal n noté A_n^p , se lit « A_n^p », est :

- $A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)$ avec p facteurs
- $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

Idée de démonstration :

On utilise un raisonnement par cases :

1^{er} élément	2^e élément	3^e élément	...	p^e élément
n possibilités	$\times (n-1)$ possibilités	$\times (n-2)$ possibilités	$\times \dots \times$	$(n-p+1)$ possibilités

On a n possibilités pour choisir le premier élément de la liste, puis $(n-1)$ choix possibles pour le deuxième élément, et ainsi de suite jusqu'au dernier p^e élément.

Par convention : $A_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$



Exemples : Un drapeau est constitué de trois bandes verticales de couleurs.

a) De combien de façons peut-on peindre les trois bandes de couleurs différentes, en utilisant trois des 6 couleurs fondamentales : bleu, jaune, rouge vert, violet, orange ?

On voit que nous sommes dans une situation où les éléments doivent être ordonnés et il n'y a pas de répétition d'une couleur : il faut donc faire un arrangement à 3 éléments d'un ensemble à 6 éléments ou le nombre de 3-uplets distincts d'un ensemble à 6 éléments

$$A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

On peut donc faire 120 drapeaux à trois bandes avec trois couleurs différentes parmi les 6 proposées.

Il y a 120 choix ordonnés de 3 couleurs 2 à 2 distincts parmi 6 couleurs

b) Combien de drapeaux supplémentaires peut-on obtenir si on accepte que les deux bandes non adjacentes soient de la même couleur ?

$$6 \times 5 \times 5 = 150 \quad \text{ou} \quad 6 \times 5 \times 1 = 30$$

$$150 - 120 = 30$$

On peut peindre 30 drapeaux supplémentaires

Calculatrices

- Numworks Touche Toolbox puis Dénombrement enfin permute(n,k)
- TI-83 Plus : [6] [math] PRB [2] (Arrangement) 3
- TI Nspire : [menu] [5] [2] (Affichage : nPr(n,x))
- Casio graph35+ : menu probabilités PROBA puis OPTN > F6 > PROB (Affichage : nPr)



V Combinaison

Définition 9 : Combinaison

Soit E un ensemble fini de cardinal n ($n \geq 1$) et k un entier tel que ($1 \leq p \leq n$).

Une **combinaison** à p éléments de E est un sous ensemble de E qui possède p éléments.

Remarques :

- a) Une combinaison à p éléments de E correspond à un choix **non ordonné** de p éléments de E , **2 à 2 distincts (pas de répétition d'éléments)**.
- b) Pour les combinaisons, on parle de tirage **sans remise**, de tirage **simultané**.

Exemple : Soit $E = \{a; b; c; d\}$.

- $\{a; b; c\}$ et $\{b; c; d\}$ sont deux combinaisons différentes à 3 éléments de E .
- En revanche $\{a; b; c\}$ et $\{b; a; c\}$ sont deux combinaisons égales, à 3 éléments de E .
- Enfin $\{a; b; a\}$ n'est pas une combinaison à 3 éléments puisque ce sous-ensemble s'écrit plus simplement $\{a; b\}$. C'est donc une combinaison à 2 éléments.

Théorème 2 : Nombre de combinaisons

Le nombre de combinaisons à p éléments ($1 \leq p \leq n$) d'un ensemble E de cardinal n , noté C_n^p ou $\binom{n}{p}$, se

lit « C_n^p » ou « p parmi n », est : $C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

$\binom{n}{p}$ s'appelle **coefficient binomial**.

Démonstration :

- A partir d'une combinaison à p éléments, on peut former par permutation de ces éléments $p!$ arrangements à p éléments de E .
- Les $\binom{n}{p}$ combinaisons à p éléments de E engendrent bien $p! \binom{n}{p}$ arrangements différents.
En effet, aucun d'eux n'est compté 2 fois, car 2 combinaisons différentes (différent par au moins un élément) ne peuvent engendrer des arrangements identiques.
Aucun arrangement à p éléments n'est ainsi oublié, puisque tout arrangement est engendré par la combinaison (sous-ensemble) constituée de ses p éléments et d'eux seuls.
- Les A_n^p arrangements à p éléments de E sont donc ainsi obtenus; il en existe $p!$ fois plus que de combinaisons à p éléments.
- D'où $A_n^p = \binom{n}{p} p!$ ce qui équivaut à $\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Exemple :

a) Dans une classe de 31 élèves (5 filles et 26 garçons), combien y a-t-il de choix possibles de deux délégués ?

On voit que nous sommes dans une situation où les éléments ne doivent pas être ordonnés et il n'y a pas de répétition : il faut donc déterminer le nombre de combinaison de 2 éléments parmi 31

$$\binom{31}{2} = \frac{31!}{2!(31-2)!} = \frac{31!}{2! \times 29!} = 465$$

Il y a donc 465 choix possibles de deux délégués

b) Même question si l'on veut une fille et un garçon délégués ?

Si on veut une fille : 5 choix possibles

Si on veut un garçon : 26 choix possibles

Alors cela donne 130 couples de délégués possibles car $5 \times 26 = 130$

Calculatrices

- Numworks Touche Toolbox puis Dénombrement enfin binomial(n,k)
- TI-83 Plus : [31] [math] PRB [3] (Combinaison) 2
- TI Nspire : [menu] [5] [2] (Affichage : nPr(n,x))
- Casio graph35+ : menu probabilités PROBA puis OPTN > F6 > PROB (Affichage : nPr)



VI Coefficients binomiaux

Définition 10 : Coefficients binomiaux

Pour tout couple (n, p) d'entiers naturels tels que $n > 0$ et $0 \leq p \leq n$, les nombres $\binom{n}{p}$ sont appelés **coefficients binomiaux**.

Propriétés des coefficients binomiaux

Pour tout couple (n, p) d'entiers naturels tels $n > 0$ et $0 \leq p \leq n$,

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

Démonstration :

- $\binom{n}{0} = \frac{A_n^0}{0!} = \frac{1}{1} = 1$ ou avec l'expression utilisant les factorielles $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \times n!} = 1$
- De même $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \times 1} = 1$
- $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = n$
- $\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$

Cas particulier : $\binom{0}{0} = 1$

Exemple : Trouver un entier naturel k différent de 8, tel que $\binom{20}{8} = \binom{20}{k}$

D'après la propriété $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ il faut donc que $k = 20 - 8 = 12$

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$



Propriété d'addition

Pour tout couple (n, p) d'entiers naturels tels $n > 1$ et $0 \leq p \leq n$,

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Démonstration 1, par dénombrement :

Parmi les $n+1$ objets, on considère un objet " a " en particulier :

- si cet objet " a " fait partie des $p+1$ objets tirés, il y a $\binom{n}{p}$ possibilités de choisir les p autres objets parmi les n objets restants.
- si en revanche, cet objet " a " ne fait pas partie du tirage, il y a $\binom{n}{p+1}$ possibilités de choisir les $p+1$ autres objets parmi les n objets restants.

Donc pour choisir $p+1$ objets parmi $n+1$: $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

Démonstration 2, par calcul :

On peut aussi démontrer ce théorème en fonction des factorielles.

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-(p+1))!} \\
 &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} \\
 &= \frac{n! \times (p+1)}{(p+1)!(n-p)!} + \frac{n! \times (n-p)}{(p+1)!(n-p)!} \quad (\text{mise au même dénominateur en prenant les « plus grands nombres »}) \\
 &= \frac{n!}{(p+1)!(n-p)!} ((p+1) + (n-p)) \\
 &= \frac{n!}{(p+1)!(n-p)!} (n+1) \\
 &= \frac{n! \times (n+1)}{(p+1)!(n-p)!} \\
 &= \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} \\
 &= \binom{n+1}{p+1}
 \end{aligned}$$



Triangle de Pascal

On utilise la formule $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$ que l'on applique dans un tableau

$n \setminus p$	0	1	2	...	p	$p+1$	...	n	$n+1$
0	$\binom{0}{0} = 1$								
1	$\binom{1}{0} = 1$	$\binom{1}{1} = 1$							
2	$\binom{2}{0} = 1$	$\binom{2}{1} = 2$	$\binom{2}{2} = 1$						
...									
n	$\binom{n}{0} = 1$	$\binom{n}{1} = n$	$\binom{n}{2}$	...	$\binom{n}{p}$	$\binom{n}{p+1}$	...	$\binom{n}{n} = 1$	
$n+1$	$\binom{n+1}{0} = 1$	$\binom{n+1}{1} = n+1$	$\binom{n+1}{2}$	...		$\binom{n+1}{p+1}$	...	$\binom{n+1}{n} = n+1$	$\binom{n+1}{n+1} = 1$

C'est à dire

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Remarques :

- La 1^o colonne du tableau n'est remplie que de 1 car $\binom{n}{0} = 1$

ainsi que la diagonale car $\binom{n}{n} = 1$

- Sur chaque ligne, on retrouve $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$



Binôme de Newton

Rappelons les identités remarquables :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{avec } n = 2 \text{ et les coefficients } 1, 2, 1$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \text{avec } n = 3 \text{ et les coefficients } 1, 3, 3, 1$$

On peut généraliser...

Binôme de Newton (admis)

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Propriété

Soit n un entier naturel, alors

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

Démonstration 1, à l'aide du dénombrement :

Soit E un ensemble fini à n éléments.

- On cherche l'ensemble des parties de E , constitué de 0 élément, 1 éléments, ..., n éléments

Pour cela, on pose pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n , E_k l'ensemble des parties de E composées de k éléments d'où $\text{Card}(E_k) = \binom{n}{k}$

Les E_k sont deux à deux disjoints et forment l'**ensemble de toutes les parties** de E

$$\text{D'où } \text{Card}(E_0 \cup E_1 \cup \dots \cup E_n) = \text{Card}(E_0) + \text{Card}(E_1) + \dots + \text{Card}(E_n) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$$

Donc le nombre de parties de E ensemble à n éléments est de $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$

- En cherchant une autre méthode pour déterminer le nombre de parties de E à n éléments, on sait que pour chaque élément, on a deux choix : on le prend dans la partie ou non.

Alors E possède $2 \times 2 \times \dots \times 2$ (n facteurs) de parties

Donc E possède 2^n de parties

- En regroupant les deux éléments, on obtient : $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

Démonstration 2, en utilisant la formule du binôme Newton :

Cas particulier si $a = b = 1$

$$(1 + 1)^n = \binom{n}{0} 1^n 1^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} 1^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} 1^2 + \dots + \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k + \dots + \binom{n}{n} 1^0 1^n$$

$$(2)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{k} + \dots + \binom{n}{n} \quad \text{d'où } 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$



VII Synthèse

Résumons un peu ce que l'on a vu en présentant les différentes questions que l'on doit se poser lorsque l'on est confronté à un problème de dénombrement. Cela nous permettra de savoir **choisir le concept** à utiliser en fonction de la situation.

1. Les répétitions sont-elles ou non autorisées ?
2. L'ordre des éléments est-il important ?
3. Si l'ordre importe, est-ce que tous les éléments sont utilisés ?

Nous pouvons représenter par un **arbre de décision** ces différentes alternatives.

Ensemble à n éléments fini et p un entier tels que $n > 0$ et $0 \leq p \leq n$,

