



CHAP 3 – DENOMBREMENT (SERIE 5)

20. Avec des combinaisons

$$\text{a)} \quad \frac{6 \times 5}{2}$$

$$\text{b)} \quad \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12}{4 \times 3 \times 2}$$

$$\text{c)} \quad \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2}$$

$$\text{d)} \quad \frac{\frac{7 \times 6}{2}}{3 \times 2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{e)} \quad \frac{9 \times 8}{5 \times 4} = \frac{18}{5}$$

$$\text{f)} \quad \frac{7 \times 6 \times 5}{10 \times 9 \times 8} = \frac{7}{24}$$

$$\text{g)} \quad \frac{\frac{5 \times 4}{2} \times \frac{6 \times 5}{2}}{3 \times 2} = \frac{25}{14}$$

$$\text{h)} \quad \frac{\frac{5 \times 4}{2} \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2}}{7 \times 6 \times 5} = \frac{40}{7}$$

$$77. \quad n \binom{n-1}{p-1} = n \frac{(n-1)!}{(n-p)!(p-1)!} = \frac{n!p}{(n-p)!p!} = p \binom{n}{p}$$

$$78. \quad (n-p) \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{n!(p+1)}{(n-p-1)!(p+1)!} = (p+1) \binom{n}{p+1}$$

$$79. \quad \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-p)(n-p-1)}{2} - \frac{(n-q)(n-q-1)}{2} + \frac{(n-p-q)(n-p-q-1)}{2} = pq$$

$$80. \quad 1. \quad \binom{n-2}{p} + \binom{n-2}{p-1} = \binom{n-1}{p} \quad \text{et} \quad \binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2} = \binom{n-1}{p-1}$$

$$\text{donne} \quad \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} = \binom{n}{p}.$$

$$2. \text{ On peut aussi utiliser deux fois celle d'avant } \binom{n-3}{p} + 2 \binom{n-3}{p-1} + \binom{n-3}{p-2} = \binom{n-1}{p}$$

$$\text{et } \binom{n-3}{p-1} + 2 \binom{n-3}{p-2} + \binom{n-3}{p-3} = \binom{n-1}{p-1} \text{ qui donne le résultat.}$$

131. Démonstration (1)

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^n \left(\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right)$$

d'après la formule de Pascal et par télescopage il reste $\binom{n+1}{p+1} - 0 = \binom{n+1}{p+1}$ car $\binom{p}{p+1} = 0$.

133. Démonstration (2)

$$1. \binom{n}{p} \binom{p}{k} = \frac{n!}{(n-p)!p!} \times \frac{p!}{(p-k)!k!}$$

et $\binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \times \frac{(n-k)!}{(n-p)!(p-k)!}$ qui sont bien égaux.

$$2. \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \sum_{k=0}^p \binom{n}{p} \binom{p}{k} = \binom{n}{p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} = 2^p \binom{n}{p}$$

134. Démonstration (3)

1. On utilise l'égalité : $(1+x)^{n+p} = (1+x)^n(1+x)^p$ qui donne à l'aide de la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} x^k = \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i \right) \left(\sum_{j=0}^p \binom{p}{j} x^j \right) = \sum_{k=0}^{n+p} \left(\sum_{i+j=k} \binom{n}{i} \binom{p}{j} \right) x^k$$

et par identification des coefficients on a : $\binom{n+p}{k} = \sum_{i+j=k} \binom{n}{i} \binom{p}{j} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{p}{k-i}$.

2. Avec $n = p$ dans la relation précédente ce qui donne $\binom{2n}{n}$.