CHAP 3 – DENOMBREMENT (SERIE 5)

20. Avec des combinaisons

a) $\frac{6\times 5}{2}$ **b)** $\frac{15\times 14\times 13\times 12}{4\times 3\times 2}$ **c)** $\frac{7\times 6\times 5}{3\times 2}$

d) $\dfrac{\frac{7\times 6}{2}}{\frac{9\times 8\times 7}{3\times 2}}=\frac{1}{4}$ **e)** $\frac{9\times 8}{5\times 4}=\frac{18}{5}$ **f)** $\frac{7\times 6\times 5}{10\times 9\times 8}=\frac{7}{24}$

g) $\dfrac{\frac{5\times 4}{2}\times\frac{6\times 5}{2}}{\frac{9\times 8\times 7}{3\times 2}}=\frac{25}{14}$ **h)** $\dfrac{\frac{5\times 4}{2}\times\frac{6\times 5\times 4}{3\times 2}}{\frac{7\times 6\times 5}{3\times 2}}=\frac{40}{7}$

77. $n\binom{n-1}{p-1}=n\frac{(n-1)!}{(n-p)!(p-1)!}=\frac{n!\,p}{(n-p)!\,p!}=p\binom{n}{p}$

78. $(n-p)\frac{n!}{(n-p)!\,p!}=\frac{n!(p+1)}{(n-p-1)!(p+1)!}=(p+1)\binom{n}{p+1}$

79. $\frac{n(n-1)}{2}-\frac{(n-p)(n-p-1)}{2}-\frac{(n-q)(n-q-1)}{2}$
$+\frac{(n-p-q)(n-p-q-1)}{2}=pq$

80. 1. $\binom{n-2}{p}+\binom{n-2}{p-1}=\binom{n-1}{p}$ et $\binom{n-2}{p-1}+\binom{n-2}{p-2}=\binom{n-1}{p-1}$

donne $\binom{n-1}{p}+\binom{n-1}{p-1}=\binom{n}{p}$.

2. On peut aussi utiliser deux fois celle d’avant $\binom{n-3}{p}+2\binom{n-3}{p-1}+\binom{n-3}{p-2}=\binom{n-1}{p}$

et $\binom{n-3}{p-1}+2\binom{n-3}{p-2}+\binom{n-3}{p-3}=\binom{n-1}{p-1}$ qui donne le résultat.

131. Démonstration (1)

$$\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\sum_{k=p}^{n}\left(\binom{k+1}{p+1}-\binom{k}{p+1}\right)$$

d'après la formule de Pascal et par télescopage il reste $\binom{n+1}{p+1}-0=\binom{n+1}{p+1}$ car $\binom{p}{p+1}=0$.

133. Démonstration (2)

1. $\binom{n}{p}\binom{p}{k}=\dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}\times\dfrac{p!}{(p-k)!\,k!}$

et $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=\dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}\times\dfrac{(n-k)!}{(n-p)!(p-k)!}$ qui sont bien égaux.

2. $\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{p}\binom{p}{k}=\binom{n}{p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}=2^{p}\binom{n}{p}$

134. Démonstration (3)

1. On utilise l'égalité : $(1+x)^{n+p}=(1+x)^{n}(1+x)^{p}$ qui donne à l'aide de la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}x^{k}=\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{i}\right)\left(\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}x^{j}\right)=\sum_{k=0}^{n+p}\left(\sum_{i+j=k}\binom{n}{i}\binom{p}{j}\right)x^{k}$$

et par identification des coefficients on a : $\binom{n+p}{k}=\sum_{i+j=k}\binom{n}{i}\binom{p}{j}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{p}{k-i}$.

2. Avec $n=p$ dans la relation précédente ce qui donne $\binom{2n}{n}$.