



Méthode : suites arithmético-géométriques

Définition : Soient a et b deux réels. Une suite arithmético-géométrique associée à a et b est une suite réelle (u_n) qui vérifie pour tout entier naturel n la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$

Pour trouver l'expression de u_n en fonction de n , on peut utiliser le principe de récurrence ou une suite auxiliaire.

Exercice d'application

Soient (u_n) est une suite définie par son premier terme $u_0 = 4$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = 3u_n - 6$

Et la suite auxiliaire (v_n) par : $v_n = u_n - 3$

1. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
3. Etudier la convergence de (u_n) .

Correction

On sait que (u_n) est une suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 3u_n - 6$ et que $v_n = u_n - 3$ pour tout entier naturel n .

1. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique

Pour démontrer la suite (v_n) est bien une suite géométrique, il faut prouver après quelques lignes de calcul que $v_{n+1} = q \cdot v_n$

Méthode 1 dite par substitution :

$$\begin{aligned}
 \text{On a } v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 \quad \text{car } v_n = u_n - 3 \\
 &= 3u_n - 6 - 3 \quad \text{car } u_{n+1} = 3u_n - 6 \\
 &= 3u_n - 9 \\
 &= 3(v_n + 3) - 9 \quad \text{car } u_n = v_n + 3 \text{ puisque } v_n = u_n - 3 \\
 &= 3v_n + 9 - 9 \\
 &= 3v_n
 \end{aligned}$$

Méthode 2 dite par factorisation :

$$\begin{aligned}
 \text{On a } v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 \quad \text{car } v_n = u_n - 3 \\
 &= 3u_n - 6 - 3 \quad \text{car } u_{n+1} = 3u_n - 6 \\
 &= 3u_n - 9 \\
 &= 3(u_n - 3) \quad \text{car on factorise par 3} \\
 &= 3v_n \quad \text{car } v_n = u_n - 3
 \end{aligned}$$

On en déduit dans chacun des cas que $v_{n+1} = 3v_n$ alors (v_n) est bien une suite géométrique.



Pour le calcul de v_0 on utilise la relation :

$$v_0 = u_0 3$$

$$v_0 = 4 - 3$$

$$v_0 = 1$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_0 = 1$

2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

On sait que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_0 = 1$

Alors pour tout entier naturel n , $v_n = v_0 \times q^n$ c'est à dire $\boxed{v_n = 1 \times 3^n = 3^n \text{ pour } n \in \mathbb{N}}$

Comme $v_n = u_n 3$ alors $u_n = v_n + 3$

Donc $\boxed{u_n = 3^n + 3 \text{ pour } n \in \mathbb{N}}$

3. Étudier la convergence de (u_n)

On utilise pour cela une propriété :

- Si $q > 1$ alors (q^n) diverge vers $+\infty$.
- Si $-1 < q < 1$ alors (q^n) converge vers 0.

On sait que $u_n = 3^n + 3$ pour $n \in \mathbb{N}$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n + 3 = +\infty$

Donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}$