



Méthode : Utiliser le théorème de convergence

Théorème : De convergence des suites monotones

- Une suite croissante et majorée converge.
- Une suite décroissante et minorée converge.
- Une suite croissante (respectivement décroissante) non majorée (respectivement non minorée) diverge vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

Exercice d'application

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire que (u_n) est convergente.

Correction

On veut montrer que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Considérons la propriété : $P_n : "1 \leq u_{n+1} \leq u_n"$ pour $n \in \mathbb{N}$

- Initialisation :

Pour $n = 0$, on a $u_0 = 4$ et $u_1 = 2$ donc $1 \leq u_1 \leq u_0$ la propriété est vraie au rang 0.

- Hérédité :

On va montrer que si la propriété est vraie à un certain rang $k \geq 0$ alors elle est vraie au rang $k + 1$.

Supposons donc que $1 \leq u_{k+1} \leq u_k$.

Comme la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit :

$$\sqrt{1} \leq \sqrt{u_{k+1}} \leq \sqrt{u_k}$$

c'est-à-dire $1 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1}$

Donc la propriété est vraie au rang $k + 1$.

- Conclusion :

La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire,

D'après le principe de récurrence, la propriété P_n est toujours vraie pour tout entier naturel n

Donc $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

On sait que $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors on déduit que (u_n) est décroissante

et que $1 \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit que la suite (u_n) est minorée :

D'où la suite (u_n) est décroissante et minorée.

d'après le théorème de convergence, la suite (u_n) est convergente