



Méthode : Montrer qu'une suite est minorée, majorée, bornée

Pour déterminer ou justifier l'existence de minorants ou de majorants d'une suite, plusieurs méthodes peuvent être utilisées parmi lesquelles :

- l'utilisation de majorations, de minorations ou d'encadrements évidents ;
- l'utilisation des variations de f dans le cas $u_n = f(n)$;
- l'étude du signe de la différence entre les termes de la suite et le majorant ou le minorant éventuel ;
- l'utilisation d'une démonstration par récurrence.

Exercice d'application

- Donner un minorant de la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par $u_n = 5 + 2n \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
- Donner un majorant de la suite (s_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par $s_n = -2n^2 + 8n + 3$.
- Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{6n+2}{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est majorée par 3.
- Soit (r_n) la suite définie par $r_0 = 6$ et $r_{n+1} = \sqrt{r_n + 4}$ pour tout entier naturel n . Montrer par récurrence que $2 \leq r_n \leq 6$ pour tout entier $n \geq 0$. Que peut-on en déduire ?

Correction

- Comme $n \geq 0$ on en déduit que, pour tout entier naturel n , on a $2n \left(\frac{1}{3}\right)^n \geq 0$
 puis que $5 + 2n \left(\frac{1}{3}\right)^n \geq 5$ c'est-à-dire que $u_n \geq 5$ pour tout entier naturel n
 Donc la suite (u_n) est donc bien minorée par 5
- On a $s_n = f(n)$ avec f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 8x + 3$.
 Comme $-2 < 0$, f atteint son maximum en $\frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2 \times (-2)} = 2$, qui est alors $f(2) = 11$.
 Comme la suite (s_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $s_n = f(n)$
 On en déduit que la suite (s_n) est majorée par 11
- On a $v_n = \frac{6n+2}{2n+1}$, on va donc étudier le signe de la différence entre v_n et 3 pour $n \geq 0$:

$$v_n - 3 = \frac{6n+2}{2n+1} - 3 = \frac{6n+2}{2n+1} - \frac{3(2n+1)}{2n+1} = \frac{6n+2-6n-3}{2n+1} = \frac{-1}{2n+1}.$$
 Or comme $n \geq 0$, on en déduit que $2n+1 > 0$ et donc que $\frac{-1}{2n+1} < 0$.
 Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - 3 < 0$, c'est-à-dire $v_n < 3$
 Donc la suite (v_n) est majorée par 3



4. On veut montrer que $2 \leq r_n \leq 6$ pour tout $n \geq 0$.

- On considère la propriété : $P_n : " 2 \leq r_n \leq 6 "$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation :

Pour $n = 0$, on a $r_0 = 6$ donc $2 \leq r_0 \leq 6$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

- Hérédité :

On va montrer que si la propriété est vraie à un certain rang $k \geq 0$ alors elle est vraie au rang $k + 1$.

Supposons donc que $2 \leq r_k \leq 6$ (hypothèse de récurrence), on a alors :

$$\begin{aligned} 6 &\leq r_k + 4 \leq 10 \\ \sqrt{6} &\leq \sqrt{r_k + 4} \leq \sqrt{10} && \text{car la fonction racine carrée est croissante sur } [0 ; +\infty[\\ 2 &\leq \sqrt{r_k + 4} \leq 6 && \text{car } 2 \leq \sqrt{6} \text{ et } \sqrt{10} \leq 6 \\ 2 &\leq r_{k+1} \leq 6. \end{aligned}$$

On a donc bien $2 \leq r_{k+1} \leq 6$ c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $k + 1$.

- Conclusion :

La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire ; donc par récurrence elle est vraie pour tout $n \geq 0$ c'est-à-dire $2 \leq r_n \leq 6$ pour tout $n \geq 0$.

On vient de montrer que la suite (r_n) est bornée par 2 et 6