



Méthode : Étudier le sens de variation d'une suite par récurrence

- On peut montrer qu'une suite est croissante en montrant par récurrence que

$$u_{n+1} \geq u_n \text{ pour tout } n.$$

- On peut montrer qu'une suite est décroissante en montrant par récurrence que

$$u_{n+1} \leq u_n \text{ pour tout } n.$$

Toutes les méthodes vues en Première ne permettaient pas de prouver le sens de variation de certaines suites. Cette méthode vient donc en complément de celles-ci.

Exercice d'application

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3$ pour tout entier naturel n .

Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

Correction

On veut montrer que $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \geq 0$.

- On considère la propriété : $P_n : "u_{n+1} \leq u_n"$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation :

Pour $n = 0$, on a $u_0 = 5$ et $u_1 = \frac{1}{5}u_0 + 3 = 4$.

On a donc bien $u_1 \leq u_0$: la propriété est vraie pour $n = 0$.

- Hérédité :

On va montrer que si la propriété est vraie à un certain rang $k \geq 0$ alors elle est vraie au rang $k + 1$.

Supposons que $u_{k+1} \leq u_k$ (hypothèse de récurrence), on a alors :

$$\frac{1}{5}u_{k+1} \leq \frac{1}{5}u_k \quad \text{car on multiplie par } \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{5}u_{k+1} + 3 \leq \frac{1}{5}u_k + 3 \quad \text{car on ajoute 3}$$

$$u_{k+2} \leq u_{k+1}$$

On a donc bien $u_{k+2} \leq u_{k+1}$ c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $k + 1$.

- Conclusion :

La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire ; donc par récurrence elle est vraie pour tout $n \geq 0$

c'est-à-dire que $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

On vient de montrer que la suite (u_n) est décroissante.