



Méthode : Démontrer par récurrence une propriété

La **démonstration par récurrence** est un type de démonstration utilisé pour démontrer qu'une propriété est vraie pour des entiers positifs à partir d'un rang donné n_0 . Pour démontrer par récurrence qu'une propriété est vraie pour tout entier positif n_0 , on procède par étapes :

- On énonce la propriété à démontrer.
- **Initialisation** : on vérifie que la propriété est vraie pour n_0 .
- **Hérédité** : on vérifie que si l'on suppose que la propriété est vraie à un rang $k \geq n_0$ (c'est ce que l'on appelle l'**hypothèse de récurrence**) alors la propriété est vraie au rang $k+1$ (le rang suivant k).
- **Conclusion** : la propriété est vraie pour n_0 et elle est héréditaire ; donc par récurrence elle est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exercice d'application

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 4$ et $v_{n+1} = 2v_n - 7$ pour tout entier naturel n .

Démontrer par récurrence que $v_n = 7 - 3 \times 2^n$ pour tout $n \geq 0$.

Correction

On veut montrer que $v_n = 7 - 3 \times 2^n$ pour tout $n \geq 0$.

- On considère la propriété On considère la propriété : $P_n : "v_n = 7 - 3 \times 2^n"$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- Initialisation : pour $n = 0$, on a $v_0 = 4$ et $7 - 3 \times 2^0 = 4$.

On a donc bien $v_0 = 7 - 3 \times 2^0$, la propriété est vraie pour $n = 0$.

- Hérédité : on va montrer que si la propriété est vraie à un certain rang $k \geq 0$ alors elle est vraie au rang $k+1$.

Supposons donc que $v_k = 7 - 3 \times 2^k$ (on suppose la propriété vraie pour k : c'est l'hypothèse de récurrence), on a alors :

$$2v_k = 2(7 - 3 \times 2^k) \quad (\text{par l'hypothèse de récurrence})$$

$$2v_k - 7 = 2(7 - 3 \times 2^k) - 7$$

$$2v_k - 7 = 14 - 3 \times 2^{k+1} - 7$$

$$v_{k+1} = 7 - 3 \times 2^{k+1}$$

On a donc bien $v_{k+1} = 7 - 3 \times 2^{k+1}$, c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $k+1$.

- Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire ; donc par récurrence elle est vraie pour tout $n \geq 0$ c'est-à-dire que $v_n = 7 - 3 \times 2^n$ pour tout $n \geq 0$