CHAPITRE 1 Suites et récurrence

Manuel p. 12-47

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

Dans ce chapitre, nous verrons le raisonnement par récurrence, et nous consoliderons et enrichirons les connaissances sur les suites vues en classe de Première.

Dans un premier temps, nous présenterons le raisonnement par récurrence.

Puis dans un deuxième temps, nous étudierons la notion de limite d'une suite. Nous verrons une définition plus formelle que celle vue en classe de Première, puis nous verrons différentes méthodes pour déterminer la limite d'une suite : opérations sur les limites, théorème de comparaison, théorème des gendarmes…

Enfin dans un dernier temps nous étudierons quelques cas particuliers de suites : les suites géométriques et les suites monotones.

Objectifs

- → **Démontrer une propriété par récurrence.**
- → **Comprendre et utiliser la définition de limite d'une suite.**
- → **Déterminer la limite d'une suite en utilisant les opérations sur les limites ou en levant une forme indéterminée.**
- → **Déterminer la limite d'une suite en utilisant le théorème de comparaison ou le théorème des gendarmes.**
- → **Déterminer la limite d'une suite géométrique.**
- → **Étudier la convergence d'une suite monotone.**
- → **Étudier la convergence d'une suite.**
- → **Étudier des phénomènes d'évolution.**

II. Corrigés

Pour prendre un bon départ p. 13

1. Calculer les termes d'une suite définie par une forme explicite

$u_0 = 3^0 - 1 = 0$

$u^5 = 3^5 - 1 = 242$

2. Calculer les termes d'une suite définie par une relation de récurrence

$v_0 = 3$

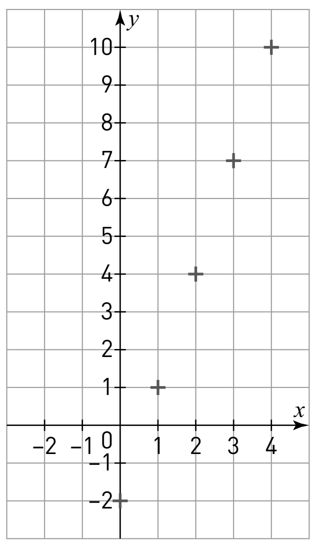
$v_1 = 2v_0 - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$

$v_2 = 2v_1 - 1 = 2 \times 5 - 1 = 9$

$v_3 = 2v_2 - 1 = 2 \times 9 - 1 = 17$

3. Représenter graphiquement une suite

1.



2. $v_0 = 3$; $v_1 = -2$; $v_2 = 1$; $v_3 = 5$; $v_4 = -2$

4. Étudier les variations d'une suite

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 8 - (n^2 - 8)$$
$$= n^2 + 2n + 1 - 8 - n^2 + 8$$
$$= 2n + 1$$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{3^n}}{\frac{2^n}{3^{n-1}}} = \frac{2^{n+1}}{3^n} \times \frac{3^{n-1}}{2^n} = \frac{2}{3} < 1$$

Donc la suite (v_n) est strictement décroissante.

5. Modéliser avec une suite

1. $1500 \times \left(1 - \frac{30}{100}\right) + 500 = 1550$

Donc il y aura 1 550 élèves inscrits le 1er septembre 2021.

2. Soit u_n le nombre d'élèves inscrits le 1er septembre 2020 + n.

$u_0 = 1\,500$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \left(1 - \frac{30}{100}\right)u_n + 500 = 0{,}7u_n + 500$$

6. Utiliser les suites arithmétiques et géométriques

1. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + (-3)$.

Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = -3$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + n \times r$

Donc $u_n = 5 - 3n$

b) $u_{10} = 5 - 3 \times 10 = -25$

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2 \times v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_1 \times q^{n-1}$

Donc $v_n = 3 \times 2^{n-1}$

b) $v_{10} = 3 \times 2^{10-1} = 1\,536$

Activités

p. 14-15

1 Introduire le raisonnement par récurrence

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Introduire le raisonnement par récurrence à l'aide d'un exemple concret.

1. $2\,000\left(1 - \frac{10}{100}\right) + 200 = 2\,000$

Donc en 2021, il y aura 2 000 films sur la plateforme.

$2\,000\left(1 - \frac{10}{100}\right) + 200 = 2\,000$

Donc en 2022, il y aura 2 000 films sur la plateforme.

2. D'après la question **1.**, on peut croire cette publicité, et penser qu'il y aura toujours 2 000 films sur la plateforme.

3. a) $u_0 = 2\,000$; $u_1 = 2\,000$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n\left(1 - \frac{10}{100}\right) + 200 = 0{,}9u_n + 200$$

c) On conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2\,000$

4. a) P_0 : « $u_0 = 2\,000$ ». Donc P_0 est vraie.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = 2\,000$.

Or $u_{n+1} = 0{,}9 \times u_n + 200$

Donc $u_{n+1} = 0{,}9 \times 2\,000 + 200 = 2\,000$

Donc P_{n+1} est vraie.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2\,000$.

Donc en 2050, il y aura 2 000 films à la disposition des clients.

2 Introduire la définition de limite d'une suite

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Introduire la définition de limite d'une suite (suite ayant pour limite un nombre réel, suite ayant pour limite l'infini).

A. Étude de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2$

1. $u_0 = 0$; $u_{10} = 10^2 = 100$

$u_{100} = 100^2 = 10\,000$

On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

2. a) $n^2 > 100 \Leftrightarrow n > 10$ car $n \geqslant 0$.

Il faut donc choisir $N = 11$.

b) $n^2 > 1\,000 \Leftrightarrow n > \sqrt{1000}$ car $n \geqslant 0$.

Il faut donc choisir $N = 32$.

c) $n^2 > A \Leftrightarrow n > \sqrt{A}$ car $n \geqslant 0$.

Il faut donc choisir le plus petit entier naturel N tel que $N > \sqrt{A}$.

B. Étude de la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = 1 + \frac{1}{n}$

1. $v_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2$; $v_{10} = 1 + \frac{1}{10} = 1{,}1$

$v_{100} = 1 + \frac{1}{100} = 1{,}01$

2. On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$.

3. a) $v_n \in]0{,}9\ ;\ 1{,}1[\Leftrightarrow 0{,}9 < 1 + \frac{1}{n} > 1{,}1$

$\Leftrightarrow -0{,}1 < \frac{1}{n} < 0{,}1$

$\Leftrightarrow n > 10$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ et $\frac{1}{n} > 0$. Il faut donc choisir $N = 11$.

b) $v_n \in]0{,}99\ ;\ 1{,}01[\Leftrightarrow 0{,}99 < 1 + \frac{1}{n} < 1{,}01$

$\Leftrightarrow -0{,}01 < \frac{1}{n} < 0{,}01$

$\Leftrightarrow n > 100$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ et $\frac{1}{n} > 0$. Il faut donc choisir $N = 101$.

c) [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur : $v_n \in [1 - 10^k\ ;\ 1 + 10^k]$. Les éditions suivantes sont corrigées et utilisent
$v_n \in [1 - 10^{-k}\ ;\ 1 + 10^{-k}]$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, $v_n \in]1 - 10^{-k}\ ;\ 1 + 10^{-k}[$

$\Leftrightarrow 1 - 10^{-k} < 1 + \frac{1}{n} < 1 + 10^{-k} \quad \Leftrightarrow -10^{-k} < \frac{1}{n} < 10^{-k}$

$\Leftrightarrow n > 10^k$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ et $\frac{1}{n} > 0$.

Il faut donc choisir $N = 10^k + 1$.

3 Découvrir les propriétés des limites

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Découvrir des propriétés sur les limites (théorème de comparaison et théorème des gendarmes) à l'aide d'une approche graphique.

A. Théorème de comparaison

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

2. On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

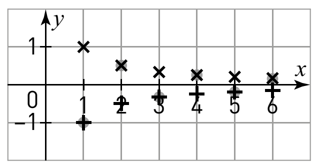
B. Théorème des gendarmes

1. $w_1 = \frac{(-1)^1}{1} = -1$; $w_2 = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}$; $w_3 = \frac{(-1)^3}{3} = -\frac{1}{3}$;
$w_4 = \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4}$; $w_5 = \frac{(-1)^5}{5} = -\frac{1}{5}$

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$

Donc $-\frac{1}{n} \leqslant \frac{(-1)^n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$ car $n > 0$. Donc $-\frac{1}{n} \leqslant w_n \leqslant \frac{1}{n}$.

3. La suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ est représentée par des ×, la suite $\left(-\frac{1}{n}\right)$ par des +, et la suite (w_n) par des •.



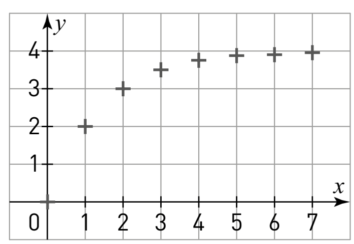
4. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} = 0$

5. On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$.

4 Étudier des suites monotones

- **Durée estimée :** 25 min
- **Objectif :** Étudier des suites monotones, et conjecturer ou déterminer leur convergence.

1. Julie a tort : il suffit de construire une suite comme celle représentée ci-dessous, qui est strictement croissante et converge vers 4.



2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = 4 - \frac{1}{n+1} - \left(4 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$.

Donc $4 - \frac{1}{n} < 4$. Donc $u_n < 4$.

c) $u_1 = 4 - \frac{1}{1} = 3$; $u_{10} = 4 - \frac{1}{10} = 3{,}9$

$u_{100} = 4 - \frac{1}{100} = 3{,}99$

On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$.

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 - n^2$

$= n^2 + 2n + 1 - n^2$

$= 2n + 1$

Donc $v_{n+1} - v_n > 0$.

Donc la suite (v_n) est strictement croissante.

b) $v_n > A \Leftrightarrow n^2 > A$

$\Leftrightarrow n > \sqrt{A}$ car $n \geqslant 0$.

Donc n_0 est le plus petit entier naturel strictement supérieur à $\sqrt{A}$.

Donc $n_0 = E(\sqrt{A}) + 1$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

c) D'après la question **b)**, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$w_{n+1} - w_n = -1 + 0{,}5^{n+1} - (-1 + 0{,}5^n)$

$= 0{,}5^n \times (0{,}5 - 1)$

$= -0{,}5 \times 0{,}5^n$

Donc $w_{n+1} - w_n < 0$.

Donc la suite (w_n) est strictement décroissante.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0{,}5^n > 0$.

Donc $-1 + 0{,}5^n > -1$. Donc $w_n > -1$

c) $w_0 = -1 + 0{,}5^0 = 0$

$w_{10} = -1 + 0{,}5^{10} \approx 0{,}999$

$w_{100} = -1 + 0{,}5^{100} \approx -1$

On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = -1$.

À vous de jouer p. 17-27

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété $P(n)$: « $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

Initialisation : pour $n = 1$, $S_1 = 1^2 = 1$ et $\frac{1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1)}{6} = 1$.

Donc $S_1 = \frac{1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1)}{6}$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)\ n(2n+1) + 6(n+1)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

Or $\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

donc $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété $P(n)$: « $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ».

Initialisation : pour $n = 1$, $S_1 = 1^3 = 1$ et $\frac{1^2 \times (1+1)^2}{4} = 1$

Donc $S_1 = \frac{1^2 \times (1+1)^2}{4}$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$S_{n+1} = S_n + (n+1)^3$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$= \dfrac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4}$

$= \dfrac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$

$= \dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $u_n < u_{n+1}$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = -3$ et

$u_1 = 2u_0 + 7 = 2 \times (-3) + 7 = 1$.

Donc $u_0 < u_1$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $u_n < u_{n+1}$.

Donc $2u_n < 2u_{n+1}$.

Donc $2u_n + 7 < 2u_{n+1} + 7$.

Donc $u_{n+1} < u_{n+2}$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$.

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $0 < u_{n+1} < u_n$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 10$ et

$u_1 = \sqrt{3u_0 + 7} = \sqrt{37}$. Donc $0 < u_1 < u_0$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $0 < u_{n+1} < u_n$.

Donc $0 < 3u_{n+1} < 3u_n$.

Donc $7 < 3u_{n+1} + 7 < 3u_n + 7$.

Donc $\sqrt{3u_{n+1} + 7} < \sqrt{3u_n + 7}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Donc $u_{n+2} < u_{n+1}$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$.

Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

5. a) $u_n > A \Leftrightarrow n^2 - 4 > A \Leftrightarrow n > \sqrt{A+4}$

Posons $n_0 = E(\sqrt{A+4}) + 1$.

Pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n > A$.

b) Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

6. 1. On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

2.

```
n=0
u=-1
while u>=-10000:
    u=3*u+1
    n=n+1
print(n)
```

3. À l'aide de la calculatrice, on trouve que cet entier est 10.

7. 1. Pour tous réels positifs a et b.

$5 - a < v_n < 5 + b \Leftrightarrow 5 - a < 5 + \dfrac{1}{n} < 5 + b$

$\Leftrightarrow -a < \dfrac{1}{n} < b \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{b}$ (si $b \neq 0$) car $\dfrac{1}{n} > 0$ et la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$. Donc $n_0 = E\left(\dfrac{1}{b}\right) + 1$.

2. On en déduit donc que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 5$.

8. 1. On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

2.

```
n=0
v=-1
while v<=10000:
    v=2*v+7
    n=n+1
print(n)
```

3. À l'aide de la calculatrice, on trouve que cet entier est 11.

9. a) $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} -5 = -5$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (par somme).

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 = 2$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ (par produit et somme).

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty, \lim\limits_{n\to+\infty} 2 = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -5 = -5$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n - 5 = +\infty$ (par produit et somme).

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n-5} = 0$ (par quotient).

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ (par produit).

10. a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0, \lim\limits_{n\to+\infty} -10 = -10$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} - 10\right) = -10$ (par somme).

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0, \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} \times \dfrac{1}{n}\right) = 0$ (par produit).

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 = 3, \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$ (par somme).

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{1+\dfrac{1}{n}}\right) = 3$ (par quotient).

11. a) $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2 = +\infty$.

Donc on a une forme indéterminée du type « $-\infty+\infty$ ».

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2(-n+2)$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty, \lim\limits_{n\to+\infty} -n + 2 = -\infty$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ (par produit).

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$.

Donc on a une forme indéterminée du type « $+\infty-\infty$ ».

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n^2\left(1 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty, \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right) = 1$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ (par produit).

12. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n \times \left(3 + \dfrac{1}{n}\right)}{n \times \left(5 - \dfrac{2}{n}\right)} = \dfrac{3 + \dfrac{1}{n}}{5 - \dfrac{2}{n}}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{3}{5}$.

b) Pour tout entier $n \geqslant 2$,

$v_n = \dfrac{n \times (2)}{n^2 \times \left(\dfrac{1}{n^2} - 1\right)} = \dfrac{2}{n \times \left(\dfrac{1}{n^2} - 1\right)}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} - 1 = -1$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n \times \left(\dfrac{1}{n^2} - 1\right) = -\infty$.

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

13. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$.

Donc $n^2 - 5 \leqslant u_n \leqslant n^2 + 5$.

Donc $u_n \geqslant n^2 - 5$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 5 = +\infty$

D'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

14. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant \cos(2n) \leqslant 1$.

Donc $-\sqrt{n} - 1 \leqslant v_n \leqslant -\sqrt{n} + 1$.

Donc $v_n \leqslant -\sqrt{n} + 1$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} -\sqrt{n} + 1 = -\infty$

D'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

15. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$.

Donc $-5 - \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant -5 + \dfrac{1}{n}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Donc :

$\lim\limits_{n\to+\infty} -5 - \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} -5 + \dfrac{1}{n} = -5$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -5$.

16. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$.

Donc $42 - \dfrac{5}{\sqrt{n}} \leqslant v_n \leqslant 42 + \dfrac{5}{\sqrt{n}}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Donc :

$$\lim\limits_{n\to+\infty} 42 - \frac{5}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} 42 + \frac{5}{\sqrt{n}} = 42.$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 42$.

17. a) $4 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b) $7 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 7^n = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

18. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 5^n$,

$5 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7 \times 0{,}2^n$ et

$-1 < 0{,}2 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}2^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

19. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 2 = \dfrac{2n-2}{n+4} - 2$

$$= \frac{2n-2-2(n+4)}{n+4}$$

$$= \frac{-10}{n+4}$$

Donc $u_n - 2 < 0$. Donc $u_n < 2$.
Donc (u_n) est majorée par 2.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)-2}{n+1+4} - \frac{2n-2}{n+4} = \frac{2n}{n+5} - \frac{2n-2}{n+4}$$

$$= \frac{2n \times (n+4) - (2n-2)(n+5)}{(n+5)(n+4)}$$

$$= \frac{10}{(n+5)(n+4)}$$

donc $u_{n+1} - u_n > 0$. Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

3. La suite (u_n) est croissante majorée. Donc elle converge.

20. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 \geqslant 0$.

Donc $n^2 + 4 \geqslant 4$. Donc $v_n \geqslant 4$.

Donc (v_n) est minorée par 4.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 + 4 - (n^2 + 4) = 2n + 1$

donc $v_{n+1} - v_n > 0$. Donc la suite (v_n) est strictement croissante.

3. La suite (v_n) est croissante et minorée.

On ne peut pas appliquer le théorème de convergence des suites monotones. Il faudrait avoir une suite croissante majorée, ou décroissante minorée.

21. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2n + 5 > 0$.

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$P(n)$: « $u_n \geqslant n + 1$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 4$, donc $u_0 \geqslant 0 + 1$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $u_{n+1} = u_n + 2n + 5$.

Donc $u_{n+1} \geqslant n + 1 + 2n + 5$

donc $u_{n+1} \geqslant n + 2$ car $2n + 4 > 0$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n + 1$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} n + 1 = +\infty$

D'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4. $u_0 = 4$

$u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 5 = 9$

$u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 5 = 16$

On conjecture que $u_n = (n+2)^2$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$P(n)$: « $u_n = (n+2)^2$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 4$, donc $u_0 = (0+2)^2$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $u_{n+1} = u_n + 2n + 5$.

Donc $u_{n+1} = (n+2)^2 + 2n + 5$.

Donc $u_{n+1} = n^2 + 6n + 9$.

Donc $u_{n+1} = (n+3)^2 = (n+1+2)^2$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+2)^2$.

22. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $u_n \geqslant \sqrt{n}$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 0$, donc $u_0 \geqslant \sqrt{0}$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.

On a $u_n \geqslant \sqrt{n}$. Donc $u_n^2 \geqslant n$.

Donc $u_n^2 + 1 \geqslant n + 1$.

Donc $\sqrt{u_n^2 + 1} \geqslant \sqrt{n+1}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Donc $u_{n+1} \geqslant \sqrt{n+1}$.

Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \sqrt{n}$.

2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

D'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

3. $u_0 = 0$

$u_1 = \sqrt{0^2 + 1} = 1$

$u_2 = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

$u_3 = \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3}$

On conjecture que $u_n = \sqrt{n}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $u_n = \sqrt{n}$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 0$, donc $u_0 = \sqrt{0}$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.

On a $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$. Donc $u_{n+1} = \sqrt{(\sqrt{n})^2 + 1}$.

Donc $u_{n+1} = \sqrt{n+1}$. Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n}$.

23. 1. $u_0 = 500$

$u_1 = 500 \times 0{,}8 + 200 = 600$

2. On prévoit que chaque année, 80 % des abonné·e·s renouvelleront leur abonnement et 200 nouvelles personnes s'abonneront.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 200$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1\,000$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 500$ et $u_1 = 600$. Donc $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1\,000$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.

On a $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1\,000$

$0{,}8u_n + 200 \leqslant 0{,}8u_{n+1} + 200 \leqslant 0{,}8 \times 1\,000 + 200$

donc $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1\,000$.

Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1\,000$.

4. La suite (u_n) est croissante et majorée, donc elle est convergente.

Soit ℓ sa limite.

$\ell = 0{,}8\ell + 200 \Leftrightarrow 0{,}2\ell = 200 \Leftrightarrow \ell = 1\,000$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1000$.

24. 1. $u_1 = (1000 - 10) \times \left(1 + \dfrac{2}{100}\right) = 1\,009{,}8$

2. Chaque année, la banque lui prélève 10 € en juin mais en décembre elle lui verse 2 % de la somme disponible sur le compte.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (u_n - 10) \times \left(1 + \frac{2}{100}\right) \\ &= (u_n - 10) \times 1{,}02 \\ &= 1{,}02u_n - 10{,}2 \end{aligned}$$

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 510 \\ &= 1{,}02u_n - 10{,}2 - 510 \\ &= 1{,}02u_n - 520{,}2 \\ &= 1{,}02\left(u_n - \frac{520{,}2}{1{,}02}\right) \\ &= 1{,}02(u_n - 510) \\ &= 1{,}02v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 1,02 et de premier terme $v_0 = u_0 - 510 = 490$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 490 \times 1{,}02^n$

or $v_n = u_n - 510$. Donc $u_n = v_n + 510$.

Donc $u_n = 490 \times 1{,}02^n + 510$.

c) $1{,}02 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1{,}02^n = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exercices apprendre à démontrer p. 28

Pour s'entraîner

Soit $A > 0$. La suite (u_n) n'est pas minorée.

Donc pour tout réel m, il existe un entier p tel que $u_p < m$.

Donc il existe un entier naturel p tel que $u_p < -A$.

Or la suite (u_n) est décroissante.

Donc pour tout entier $n \geqslant p$, $u_n \leqslant u_p$.

Donc pour tout entier $n \geqslant p$, $u_n \leqslant u_p < -A$

Donc $u_n < -A$, soit $u_n \in]-\infty ; -A[$.

Donc par définition, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Exercices calculs et automatismes p. 29

25. Calculer les termes d'une suite

1. a) $u_0 = 3 \times 0 - 5 = -5$

b) $u_{10} = 3 \times 10 - 5 = 25$

2. $v_0 = 3$

$v_1 = 2 \times v_0 - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$

$v_2 = 2 \times v_1 - 1 = 2 \times 5 - 1 = 9$

26. Calculer les termes d'une suite géométrique

a) $u_1 = u_0 \times 2 = 3 \times 2 = 6$

b) $u_4 = u_0 \times 2^4 = 3 \times 2^4 = 48$

27. Calculer les termes d'une suite arithmétique

a) $u_2 = u_1 + (-5) = 4 - 5 = -1$

b) $u_{11} = u_1 + (11 - 1) \times (-5) = 4 - 10 \times 5 = -46$

28. Déterminer la raison d'une suite géométrique

$u_6 = u_4 \times q^{6-4}$

Donc $48 = 3 \times q^2$,

$q^2 = \frac{48}{3} = 16$ et $q > 0$, donc $q = 4$.

29. Déterminer la raison d'une suite arithmétique

$u_7 = u_4 + r \times (7 - 4)$

Donc $18 = 3 + 3r$. Donc $3r = 15$. Donc $r = 5$.

30. Donner des exemples de suites

a) $u_n = n$

b) $u_n = -2 + \frac{1}{n}$

c) $u_n = -n^2$

d) $u_n = (-1)^n$

31. Limites de suites

1. a)

2. c)

3. b)

32. Limite de suites géométriques

a) Faux $10 > 1$ et $-1 < 0$, donc elle a pour limite $-\infty$.

b) Vrai car $2 > 1$ et $1 > 0$.

c) Faux $0 < \frac{1}{2} < 1$, donc elle a pour limite 0.

d) Vrai $0 < 0{,}25 < 1$.

33. Lecture graphique (1)

a) $u_0 = 3$; $u_1 = -1$; $u_2 = 2$; $u_3 = 3$

b) On peut dire que la suite (u_n) n'a pas de limite quand n tend vers $+\infty$.

34. Lecture graphique (2)

1. c)

2. b)

35. Méthode pour déterminer l'expression d'une suite

Il faut d'abord déterminer si (u_n) est une suite arithmétique ou une suite géométique.

Ici (u_n) est une suite géométrique car $u_{n+1} = q \times u_n$ avec $q = \frac{1}{4}$.

Il faut donc appliquer la formule du cours pour une suite géométrique : $u_0 \times q^n$ si on nous donne u_0, ou $u_p \times q^{n-p}$ si on nous donne un autre terme.

Ici on nous donne u_0, donc pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

36. Méthode pour démontrer une propriété par récurrence

Pour démontrer par récurrence une propriété $P(n)$ pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, il faut procéder en trois étapes.

Initialisation : on montre que $P(n_0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant n_0$. On suppose que $P(n)$ est vraie, et on montre que $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : On en déduit que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$.

Exercices d'application p. 30-32

Démontrer par récurrence

37. Soit x un réel quelconque.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$P(n)$: « $|x^n| = |x|^n$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $|x^0| = |1| = 1$ et $|x|^0 = 1$. Donc $|x^0| = |x|^0$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $|x^{n+1}| = |x^n \times x|$

$= |x^n| \times |x|$

$= |x|^n \times |x|$

$= |x|^{n+1}$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x^n| = |x|^n$.

38. 1. Si $n = 1$, alors $n^2 < 2n$.

Donc Jason a tort.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $P(n)$ est vraie. Donc $n^2 > 2n$.

On a $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$

Donc $(n+1)^2 > 2n + 2n + 1$.

Or $n \geqslant 1$, donc $2n \geqslant 2$.

Donc $(n+1)^2 > 2 + 2n + 1$.

Donc $(n+1)^2 > 2(n+1) + 1$

donc $(n+1)^2 > 2(n+1)$

donc $P(n+1)$ est vraie.

b) $0^2 = 0$ et $2 \times 0 = 0$. Donc $0^2 = 2 \times 0$.

Donc $P(0)$ n'est pas vraie.

c) Le plus petit entier n_0 tel que $P(n_0)$ soit vraie est 3. ($3^2 > 2 \times 3$)

d) Il faut donc corriger l'affirmation de Jason :

pour tout entier $n \geqslant 3$, $n^2 > 2n$.

39. Soit x un réel quelconque.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$P(n)$: « $f(2^n \times x) = f(x)$ »

Initialisation : pour $n = 0$,

$f(2^0 \times x) = f(1 \times x) = f(x)$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $f(2^{n+1} \times x) = f(2 \times 2^n \times x)$

$= f(2^n \times x)$

$= f(x)$ d'après l'hypothèse de récurrence

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(2^n \times x) = f(x)$.

40. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$P(n)$: « 4 divise $5^n - 1$ »

Initialisation : pour $n = 0$,

$5^0 - 1 = 0$. 4 divise 0, donc 4 divise $5^0 - 1$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$5^{n+1} - 1 = 5 \times 5^n - 1$

or 4 divise $5^n - 1$.

Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $5^n - 1 = 4k$

donc $5^n = 1 + 4k$

donc $5^{n+1} - 1 = 5 \times (1 + 4k) - 1$

$= 5 + 5 \times 4k - 1$

$= 4 + 5 \times 4k$

$= 4 \times (1 + 5k)$

or $1 + 5k \in \mathbb{Z}$. Donc 4 divise $5^{n+1} - 1$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, 4 divise $5^n - 1$.

41. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $u_n > 0$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 5 > 0$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$u_n > 0$ d'après l'hypothèse de récurrence.

Donc $3u_n > 0$.
Donc $3u_n + 6 > 6$.
Donc $u_{n+1} > 6 > 0$.
Donc $P(n + 1)$ est vraie.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

42. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $2{,}5 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 10$ ».
Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 10$, et
$u_1 = \sqrt{10+5} = \sqrt{15} \approx 3{,}87$
donc $2{,}5 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 10$.
Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.
On a $2{,}5 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 10$.
Donc $7{,}5 \leqslant u_{n+1} + 5 \leqslant u_n + 5 \leqslant 15$.
Donc $\sqrt{7{,}5} \leqslant \sqrt{u_{n+1}+5} \leqslant \sqrt{u_n+5} \leqslant \sqrt{15}$
car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$.
Donc $2{,}5 \leqslant \sqrt{7{,}5} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant \sqrt{15} \leqslant 10$.
Donc $P(n + 1)$ est vraie.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2{,}5 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 10$.

43. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $u_{n+1} < u_n$ ».
Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 9$, et $u_1 = \sqrt{9} = 3$. Donc $u_1 < u_0$.
Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.
On a $u_{n+1} < u_n$
donc $\sqrt{u_{n+1}} < \sqrt{u_n}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$.
Donc $u_{n+2} < u_{n+1}$
donc $P(n + 1)$ est vraie.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$.
Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant 9$ ».
Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 9$, donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 9$
Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.
On a $0 \leqslant u_n \leqslant 3$
donc $0 \leqslant \sqrt{u_n} < \sqrt{9}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$.
Donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3 \leqslant 9$
donc $P(n + 1)$ est vraie.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 9$.

44. 1. $u_0 = 0$; $u_1 = u_0 + 0 = 0$
$u_2 = u_1 + 1 = 1$; $u_3 = u_2 + 2 = 3$; $u_4 = u_3 + 3 = 6$;
$u_5 = u_4 + 4 = 10$.
On conjecture que pour tout entier $n \geqslant 1$,
$u_n = 0 + 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \dfrac{(n-1)n}{2}$.
Or $u_0 = 0$, donc on conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$u_n = \dfrac{(n-1)n}{2}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété
$P(n)$: « $u_n = \dfrac{(n-1)n}{2}$ ».
Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 0$ et $\dfrac{(0-1)0}{2} = 0$, donc $u_0 = \dfrac{(0-1)0}{2}$.
Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.
On a $u_{n+1} = u_n + n$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } u_{n+1} &= \frac{(n-1)n}{2} + n \\ &= \frac{(n-1)n + 2n}{2} \\ &= \frac{n(n-1+2)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

donc $P(n + 1)$ est vraie.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(n-1)n}{2}$.

45. 1. $v_0 = 1$ $\qquad v_1 = \dfrac{v_0}{v_0+1} = \dfrac{1}{2}$

$v_2 = \dfrac{v_1}{v_1+1} = \dfrac{1}{3} \qquad v_3 = \dfrac{v_1}{v_1+1} = \dfrac{1}{4}$

On conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{n+1}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$P(n)$: « $v_n = \dfrac{1}{n+1}$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $v_0 = 1$ et $\dfrac{1}{0+1} = 1$ donc $v_0 = \dfrac{1}{0+1}$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{v_n+1}$.

Donc $v_{n+1} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}+1} = \dfrac{1}{1+(n+1)} = \dfrac{1}{n+2}$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Limite d'une suite

46. 1. $u_n < -A \Leftrightarrow -n^2 + 5 < -A$

$\Leftrightarrow n^2 > A + 5$

$\Leftrightarrow n > \sqrt{A+5}$

Donc $n_0 = E\left(\sqrt{A+5}\right) + 1$.

2. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

47. 1. Pour tout réel $\varepsilon > 0$,

$-\varepsilon < u_n < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \dfrac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{1}{n^2} < \varepsilon$ car $\dfrac{1}{n^2} > 0$

$\Leftrightarrow n^2 > \dfrac{1}{\varepsilon}$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$

$\Leftrightarrow n > \sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}}$ donc $n_0 = E\left(\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + 1$.

2. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

48. 1. Pour tous réels a et b strictement positifs, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $20 - a < u_n < 20 + b$.

Donc tout intervalle ouvert contenant 20 contient tous les termes de la suite.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 20$.

49. 1. On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

2. a) $n = 4$

b) $n = 11$

c) $n = 32$

50. 1. On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2. a) $n = 5$

b) $n = 11$

c) $n = 22$

51. 1. On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0{,}7^n > 0$

donc $2 + 0{,}7^n > 2$. Donc $u_n > 2$.

3. a) $n = 7$

b) $n = 13$

c) $n = 20$

52. 1. On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2. a)

```
n = 0
u = 2
while u <= 1000 :
    u = 3*u
    n = n+1
print(n)
```

b) Cet entier est 6.

53. 1. On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

2. a)

```
n = 0
v = 1
while v >= 0.001 :
    n = n+1
    v = 1/(2*n+1)
print(n)
```

b) Cet entier est 500.

Opérations sur les limites

54. a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

55. a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -3$

56. a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n+\dfrac{1}{n}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^4}-5\right) = -5$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3+n = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right) = 2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

57. a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(2-n^2) = -\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-2\right) = -2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+n = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

58. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n^2 \times \left(1-\dfrac{2}{n}\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2) = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{n}\right) = 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n^3 \times \left(\dfrac{1}{n^2}-1\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(n^3) = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}-1\right) = -1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

59. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$u_n = n^3 \times \left(\dfrac{3}{n^2}-1+\dfrac{2}{n^3}\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{n^2}-1+\dfrac{2}{n^3}\right) = -1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{n\times\left(1-\dfrac{5}{n}\right)}{n\times\left(2+\dfrac{4}{n}\right)} = \dfrac{1-\dfrac{5}{n}}{2+\dfrac{4}{n}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{5}{n}\right) = 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\dfrac{4}{n}\right) = 2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$

60. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n^3 \times \left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{3}{n}-1\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{3}{n}-1\right) = -1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$v_n = \dfrac{n^3\times\left(1+\dfrac{2}{n^3}\right)}{n^2\times\left(2-\dfrac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{n\times\left(1+\dfrac{2}{n^3}\right)}{2-\dfrac{1}{n^2}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2-\dfrac{1}{n^2}\right) = 2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

61. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{n^2 \times \left(1+\frac{2}{n}\right)}{n \times \left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{n \times \left(1+\frac{2}{n}\right)}{1+\frac{1}{n}}.$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right) = 1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{n \times \left(3+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n \times \left(2+\frac{3}{n}\right)} = \dfrac{3+\frac{1}{\sqrt{n}}}{2+\frac{3}{n}}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(3+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 3$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2+\frac{3}{n}\right) = 2$

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \frac{3}{2}$

62. 1. Non, car $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^2 - 2) = +\infty$.

On obtient une forme indéterminée de la forme « $0 \times +\infty$ ».

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n - \frac{2}{n}$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Limite et comparaison

63. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3n + 1 = n + 2n + 1$.

Donc $3n + 1 > n$.

Donc $\sqrt{3n+1} > \sqrt{n}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Donc $u_n > \sqrt{n}$.

2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Donc d'après le théorème de comparaison,

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

64. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$.

Donc $-n - 1 \leqslant u_n \leqslant -n + 1$.

Donc $u_n \leqslant -n + 1$.

2. $\lim\limits_{n \to +\infty} -n + = -\infty$

Donc d'après le théorème de comparaison,

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

65. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$.

Donc $(n + 1)^2 - n \leqslant u_n \leqslant (n + 1)^2 + n$.

Donc $n^2 + n + 1 \leqslant u_n \leqslant n^2 + 3n + 1$.

Or $n + 1 > 0$.

Donc $u_n \geqslant n^2$.

2. $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

Donc d'après le théorème de comparaison,

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

66. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2 + \frac{4}{n+1}\right) = 2$

Donc d'après le théorème des gendarmes,

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

67. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-3 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -3$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-3 + \frac{1}{n^2+1}\right) = -3$

Donc d'après le théorème des gendarmes,

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -3$.

68. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$.

Donc $-5 - \frac{1}{n^2} \leqslant v_n \leqslant -5 + \frac{1}{n^2}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-5 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(-5 + \frac{1}{n^2}\right) = -5$

Donc d'après le théorème des gendarmes,

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -5$.

69. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$.

Donc $4 - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant w_n \leqslant 4 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(4 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(4 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 4$$

Donc d'après le théorème des gendarmes,

$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 4$.

70. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$.

Donc $42 - \dfrac{1}{n^5} \leqslant u_n \leqslant 42 + \dfrac{1}{n^5}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(42 - \frac{1}{n^5}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(42 + \frac{1}{n^5}\right) = 42$$

Donc d'après le théorème des gendarmes,

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 42$.

Suites géométriques

71. a) $u_n = 2 \times 4^n$

Or $4 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b) $v_n = -3 \times 4^n$

Or $4 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

c) (w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

Donc $w_n = 2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

Or $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

72. a) $u_n = -2 \times 0{,}6^{n-1}$.

Or $-1 < 0{,}6 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}6^{n-1} = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b) $3 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

73. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 1{,}5a_n$.

Donc (a_n) est une suite géométrique de raison 1,5 et de premier terme $a_0 = -1$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = -1 \times 1{,}5^n$.

$1{,}5 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}5^n = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

74. 1. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 \times \mathrm{e}^n$.

Donc u_n est de la forme $u_0 \times q^n$ avec $u_0 = 1$ et $q = \mathrm{e}$.
Donc (u_n) est une suite géométrique de raison e.

b) $\mathrm{e} > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \mathrm{e}^{-n}$.

Donc $v_n = \dfrac{1}{\mathrm{e}^n} = \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^n = q^n$ en posant $q = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

b) $-1 < \dfrac{1}{\mathrm{e}} < 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

75. $2 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$.

$-1 < 0{,}5 < 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

76. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n\left(1 - \dfrac{2^n}{3^n}\right)$.

$$u_n = 3^n\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

$-1 < \dfrac{2}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 1$.

$3 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

77. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2^n\left(1 - \dfrac{5^n}{2^n}\right)$.

$$v_n = 2^n\left(1 - \left(\frac{5}{2}\right)^n\right)$$

$2 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$.

$\frac{5}{2} > 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \left(\frac{5}{2}\right)^n = -\infty$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

78. 1. $u_0 = 1\,500$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{2}{100}\right) = 1{,}02 u_n.$$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison 1,02. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_n = 1\,500 \times 1{,}02^n$.

3. $1{,}02 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1{,}02^n = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Convergence des suites monotones

79. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{(n - (n+1))}{n \times (n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)}$$

donc $u_{n+1} - u_n < 0$. Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n - 1 = \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 = \frac{1}{n} > 0.$$

Donc $u_n > 1$. Donc (u_n) est minorée par 1.

3. La suite (u_n) est strictement décroissante et minorée. Donc elle converge.

80. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_{n+1} - v_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

donc $v_{n+1} - v_n > 0$. Donc la suite (v_n) est strictement croissante.

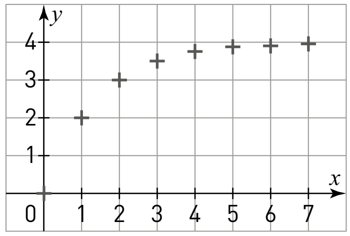
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n - 1 = 1 - \frac{1}{n^2} - 1 = -\frac{1}{n^2} < 0.$$

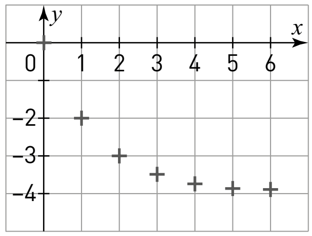
Donc $v_n < 1$. Donc (v_n) est majorée par 1.

3. La suite (v_n) est strictement croissante et majorée. Donc elle est convergente.

81. 1. Faux contre-exemple : une suite comme celle représentée ci-dessous, qui est strictement croissante et converge vers 4.



2. Faux contre-exemple : une suite comme celle représentée ci-dessous, qui est strictement décroissante et converge vers -4.



3. Faux contre-exemple : $u_n = (-1)^n$.

La suite est bornée, mais ne converge pas.

4. Faux contre-exemple : la suite représentée à la question 1.

82. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{-2(n+1)+1}{n+1+3} - \frac{-2n+1}{n+3} \\ &= \frac{-2n-1}{n+4} - \frac{-2n+1}{n+3} \\ &= \frac{(-2n-1)(n+3) - (-2n+1)(n+4)}{(n+4)(n+3)} \\ &= \frac{-2n^2 - 6n - n - 3 - (-2n^2 - 8n + n + 4)}{(n+4)(n+3)} \\ &= \frac{-7}{(n+4)(n+3)} \end{aligned}$$

donc $u_{n+1} - u_n < 0$. Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - (-2) = \frac{-2n+1}{n+3} + 2$

$$= \frac{-2n+1+2(n+3)}{n+3} = \frac{7}{n+3}$$

donc $u_n - (-2) > 0$. Soit $u_n > -2$.

Donc (u_n) est minorée par -2.

3. La suite (u_n) est strictement décroissante et minorée. Donc elle converge.

83. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{6(n+1)+3}{n+1+1} - \frac{6n+3}{n+1}$$
$$= \frac{6n+9}{n+2} - \frac{6n+3}{n+1}$$
$$= \frac{(6n+9)(n+1) - (6n+3)(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{6n^2+6n+9n+9-(6n^2+12n+3n+6)}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{3}{(n+1)(n+2)}$$

donc $v_{n+1} - v_n > 0$. Donc la suite (v_n) est strictement croissante.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - 6 = \frac{6n+3}{n+1} - 6$

$$= \frac{6n+3-6(n+1)}{n+1}$$
$$= \frac{-3}{n+1}$$

donc $v_n - 6 < 0$, soit $v_n < 6$.

Donc (v_n) est majorée par 6.

3. La suite (v_n) est strictement croissante et majorée. Donc elle est convergente.

84. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} - u_n = 0{,}5u_n + 1 - u_n = -0{,}5u_n + 1$

or $1 < u_n < 2$.

Donc $-0{,}5 > -0{,}5u_n > -0{,}5 \times 2$

donc $0{,}5 > -0{,}5u_n + 1 > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$. Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

2. La suite (u_n) est strictement croissante et majorée par 2. Donc elle converge.

85. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$v_{n+1} - v_n = 0{,}75v_n + 1 - v_n = -0{,}25v_n + 1$

or $2 < v_n < 4$.

Donc $-0{,}25 \times 2 > -0{,}25v_n > -0{,}25 \times 4$.

Donc $0{,}5 > -0{,}25v_n + 1 > 0$. Donc $v_{n+1} - v_n > 0$. Donc la suite (v_n) est strictement croissante.

2. La suite (v_n) est strictement croissante et majorée par 4. Donc elle converge.

Exercices d'entraînement p. 33-37

Démontrer par récurrence

86. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété $P(n)$: « Soit f la fonction définie par $f(x) = x^n$. Alors pour tout réel x, $f'(x) = n \times x^{n-1}$.»

Initialisation : pour $n = 1$.

Pour tout réel x, $f(x) = x^1 = x$ et $f'(x) = 1$.

Or $1 \times x^{1-1} = 1$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

Soit f la fonction définie par

$f(x) = x^{n+1} = x^n \times x$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$f'(x) = n \times x^{n-1} \times x + x^n \times 1$ d'après l'hypothèse de récurrence.

$f'(x) = (n+1) \times x^n$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.

Donc si f est la fonction définie par $f(x) = x^n$, alors pour tout réel x, $f'(x) = n \times x^{n-1}$.

87. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$:

« $(-1)^n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ -1 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$ »

Initialisation : pour $n = 0$, n est pair et $(-1)^0 = 1$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$(-1)^{n+1} = (-1)^n \times (-1)$

si $n+1$ est pair, alors n est impair, et

$(-1)^{n+1} = (-1) \times (-1) = 1$

si $n+1$ est impair, alors n est pair, et

$(-1)^{n+1} = 1 \times (-1) = -1$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, soit

$(-1)^n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ -1 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$

88. $u_1 = \frac{1}{3}$; $u_2 = \frac{u_1 + 1}{4} = \frac{1}{3}$; $u_3 = \frac{u_2 + 1}{4} = \frac{1}{3}$.

On conjecture que $u_n = \frac{1}{3}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété

$P(n)$: « $u_n = \frac{1}{3}$ ».

Initialisation : pour $n = 1$, $u_1 = \frac{1}{3}$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.

On a $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{4}$

$= \frac{\frac{1}{3} + 1}{4}$ d'après l'hypothèse de récurrence

$= \frac{1}{3}$

Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{3}$.

89. Pour tout entier $n \geqslant 4$, on considère la propriété $P(n)$: « $u_n = 3 \times 2^{n-4} - 1$ ».

Initialisation : pour $n = 4$, $u_4 = 2$ et $3 \times 2^{4-4} - 1 = 2$. Donc $u_4 = 3 \times 2^{4-4} - 1$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 4$.

Hérédité : on considère un entier $n \geqslant 4$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $u_{n+1} = 2u_n + 1$

$= 2 \times (3 \times 2^{n-4} - 1) + 1$

$= 3 \times 2^{n+1-4} - 1$

donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout entier $n \geqslant 4$, $P(n)$ est vraie, soit $u_n = 3 \times 2^{n-4} - 1$.

90. Pour tout entier $n \geqslant p$, on considère la propriété $P(n)$: « $v_n = v_p \times q^{n-p}$ ».

Initialisation : pour $n = p$, $v_p \times q^{p-p} = v_p$ donc la propriété est vraie pour $n = p$.

Hérédité : on considère un entier $n \geqslant p$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.

On a $v_{n+1} = v_n \times q$

$= v_p \times q^{n-p} \times q$

$= v_p \times q^{n+1-p}$

Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout entier $n \geqslant p$, $P(n)$ est vraie, soit $v_n = v_p \times q^{n-p}$.

91. Soit a un entier tel que $a \neq 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété $P(n)$: « $a - 1$ divise $a^n - 1$ ».

Initialisation : pour $n = 1$, $a^1 - 1 = a - 1$ donc $a - 1$ divise $a^1 - 1$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $a^{n+1} - 1 = a \times a^n - 1$. Or $a - 1$ divise $a^n - 1$,

donc $a^n - 1 = (a - 1)k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Donc $a^n = (a - 1)k + 1$.

Donc $a^{n+1} - 1 = a \times [(a - 1)k + 1] - 1$

$= a(a - 1)k + (a - 1)$

$= (a - 1)(ak + 1)$

or $ak + 1 \in \mathbb{Z}$.

Donc $a - 1$ divise $a^{n+1} - 1$. Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a - 1$ divise $a^n - 1$.

92. Soit q un réel tel que $q \neq 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$P(n)$: « $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $\frac{1 - q^{0+1}}{1 - q} = 1$

donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.

On a $1 + q + \ldots + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1}$

$= \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1}(1 - q)}{1 - q}$

$= \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1 - q}$

$= \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}$

donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, soit

$$1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

93. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$P(n)$: « $u_0 + u_1 + ... + u_n = (n + 1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$ ».

Initialisation : pour $n = 0$,

$$(0+1) \times \frac{u_0 + u_0}{2} = u_0.$$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$u_0 + ... + u_{n+1} = (n + 1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} + u_{n+1}$$

$$= \frac{(n + 1)(u_0 + u_0 + nr) + 2u_{n+1}}{2}$$

$$= \frac{(n + 1)(2u_0 + nr) + 2(u_0 + (n + 1)r)}{2}$$

$$= \frac{u_0 \quad 2(n + 1) + 2 \quad + r \quad n(n + 1) + 2(n + 1)}{2}$$

$$= \frac{u_0 \times 2(n + 1 + 1) + r(n + 1)(n + 2)}{2}$$

$$= (n + 2)\frac{u_0 \times 2 + r(n + 1)}{2}$$

$$= (n + 2)\frac{u_0 + u_0 + r(n + 1)}{2}$$

$$= (n + 2)\frac{u_0 + u_{n+1}}{2}$$

donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie,

soit $u_0 + u_1 + ... + u_n = (n + 1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$.

94. 1. $2x^2 - (x + 1)^2 = x^2 - 2x - 1$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8$

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2} \text{ et } x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

x	$-\infty$		$1 - \sqrt{2}$		$1 + \sqrt{2}$		$+\infty$
$2x^2 - (x + 1)^2$		+	0	−	0	+	

2. Pour tout entier $n \geqslant 4$, on considère la propriété $P(n)$: « $2^n \geqslant n^2$ ».

Initialisation : pour $n = 4$,

$2^4 = 16$ et $4^2 = 16$, donc $2^4 \geqslant 4^2$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 4$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 4$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.

$2^{n+1} = 2^n \times 2$

donc $2^{n+1} \geqslant n^2 \times 2$

or $n \geqslant 4 > 1 + \sqrt{2}$. Donc $2n^2 - (n + 1)^2 > 0$, soit $2n^2 > (n + 1)^2$

donc $2^{n+1} \geqslant (n + 1)^2$

donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout entier $n \geqslant 4$, $P(n)$ est vraie, soit $2^n \geqslant n^2$.

Limite d'une suite

95. 1. $100 \times 1,1 = 110$

Donc en 2020, il y aura 110 habitant·e·s.

$110 \times 1,1 = 121$

Donc en 2021, il y aura 121 habitant·e·s.

2. a) $v_0 = 100$; $v_1 = 110$ et $v_2 = 121$.

b) $v_{20} \approx 673$; $v_{30} \approx 1745$; $v_{40} \approx 4526$

c) On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

3. Une telle évolution est impossible. La population sera confrontée à des problèmes de place et de ressources.

96. 1. $30\,000 \times \frac{90}{100} + 10\,000 = 37\,000$

Donc en 2021, il y aura 37 000 abonné·e·s.

$37\,000 \times \frac{90}{100} + 10\,000 = 43\,300$

Donc en 2022, il y aura 43 300 abonné·e·s.

2. a) $u_0 = 30$; $u_1 = 37$; $u_2 = 43,3$

b) On a $u_0 = 30$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,9u_n + 10$

$u_{20} \approx 91,490$; $u_{30} \approx 97,033$

$u_{40} \approx 98,965$; $u_{50} \approx 99,639$.

c) On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 100$.

97. a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n^3\left(1-\dfrac{1}{n}-\dfrac{4}{n^3}\right)$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \dfrac{n^3}{n^2\times\left(1-\dfrac{4}{n^2}\right)} = \dfrac{n}{1-\dfrac{4}{n^2}}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.

d) Pour tout entier $n > 2$, $n^3 - \dfrac{1}{n^2-4} \leqslant a_n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 - \dfrac{1}{n^2-4} = +\infty$.

Donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

98. 1. Faux contre-exemple $u_n = \dfrac{1}{n}$.

(u_n) converge vers 0, mais (v_n) diverge vers $+\infty$.

2. Faux contre-exemple $u_n = (-1)^n$.

(u_n) diverge et (v_n) diverge également.

99. 1. Faux contre-exemple $u_n = (-1)^n$.

2. Vrai $\dfrac{n^2-1}{n^2} \leqslant v_n \leqslant \dfrac{n^2+n}{n^2}$ car $n^2 > 0$

donc $1-\dfrac{1}{n^2} \leqslant v_n \leqslant 1+\dfrac{1}{n}$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\dfrac{1}{n^2} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n} = 1$

donc d'après le théorème des gendarmes,

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

100. 1. Non : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Donc on a une forme indéterminée « $+\infty-\infty$ ».

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

donc $u_n = \dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n+1 > n$

donc $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$.

Donc $v_n > \sqrt{n}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Donc d'après le théorème de comparaison,

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

4. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}+\sqrt{n} = +\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

101. 1. Faux contre-exemple $u_n = \dfrac{1}{n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $v_n = -\dfrac{2}{u_n} = -2n$,

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

2. Vrai si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$,

alors $\dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\ ;+\infty[$.

Donc $-\dfrac{2}{u_n} \geqslant -1$, soit $v_n \geqslant -1$.

3. Faux contre-exemple $u_n = \dfrac{1}{n}$.

(u_n) est décroissante, et $v_n = -2n$, donc (v_n) est décroissante aussi.

4. Faux contre-exemple $u_n = (-1)^n$.

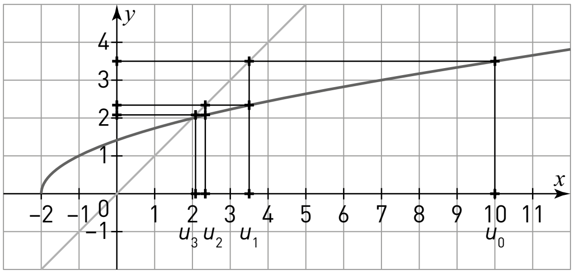
(u_n) et (v_n) sont divergentes.

102.

```
s=0
u=0
for i in range(0,100):
    u=(-1)**i/(2*i+1)
    s=s+u
print(s)
print(4*s)
```

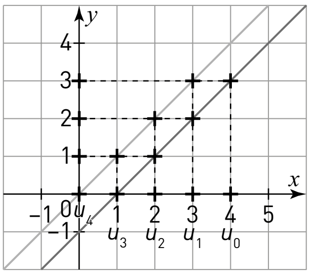
Représentation graphique et limite

103. 1. et **2.**



2. On conjecture que la suite (u_n) est décroissante et a pour limite 2.

104. 1.



2. On conjecture que la suite (u_n) est décroissante et a pour limite $-\infty$.

105. 1. $u_0 = 3$; $u_1 = -1$; $u_2 = 3$; $u_3 = -1$.

2. On conjecture que la suite (u_n) n'est pas monotone, et n'a pas de limite quand n tend vers $+\infty$.

Études de suites

106. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 2$ et $u_1 = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$.

Donc $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$

donc $\sqrt{1+1} \leqslant \sqrt{u_{n+1}+1} \leqslant \sqrt{u_n+1}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Donc $1 \leqslant \sqrt{2} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

2. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1. Donc elle converge.

107. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $u_n > 0$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = \dfrac{2^0}{3^{0+1}} = \dfrac{1}{3} > 0$

donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $u_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{3^{n+2}} = \dfrac{2^n \times 2}{3^{n+1} \times 3} = u_n \times \dfrac{2}{3}$

or $u_n > 0$, donc $u_{n+1} > 0$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, soit $u_n > 0$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Or $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2}{3} < 1$.

Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

3. (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente.

4. $u_n = \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = a \times q^n$ avec $a = \dfrac{1}{3}$ et $q = \dfrac{2}{3}$.

5. Or $-1 < q < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

108. 1. f est une fonction polynôme du second degré. $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{2 \times (-1)} = 1$.

$\beta = f(\alpha) = 1$, donc on a :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f	↗	1	↘

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 0{,}5$ et $u_1 = -0{,}5^2 + 2 \times 0{,}5 = 0{,}75$.

Donc $0 \leqslant u_0 < u_1 \leqslant 1$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$.

Or f est strictement croissante sur [0 ; 1] ;
donc $f(0) \leqslant f(u_n) < f(u_{n+1}) \leqslant f(1)$.
$0 \leqslant u_{n+1} < u_{n+2} \leqslant 1$.
Donc $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, soit $0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$.
3. (u_n) est strictement croissante et majorée par 1, donc elle est convergente.
4. $\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = -\ell^2 + 2\ell$
$\Leftrightarrow \ell^2 - \ell = 0$
$\Leftrightarrow \ell(\ell - 1) = 0$
$\Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\ell - 1 = 0$
$\Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\ell = 1$
Or $u_0 = 0{,}5$ et la suite (u_n) est strictement croissante. Donc $\ell \geqslant 0{,}5$
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

109. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 3} - \frac{1}{u_n - 3}$$
$$= \frac{1}{\dfrac{9}{6 - u_n} - 3} - \frac{1}{u_n - 3}$$
$$= \frac{6 - u_n}{9 - 3(6 - u_n)} - \frac{1}{u_n - 3}$$
$$= \frac{6 - u_n}{-9 + 3u_n} - \frac{1}{u_n - 3}$$
$$= \frac{6 - u_n}{3(u_n - 3)} - \frac{1}{u_n - 3}$$
$$= \frac{6 - u_n - 3}{3(u_n - 3)}$$
$$= \frac{3 - u_n}{3(u_n - 3)}$$
$$= -\frac{1}{3}$$

donc (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = -\frac{1}{3}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + n \times r$

or $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 3} = -\dfrac{1}{6}$

donc $v_n = -\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{3}n = \dfrac{-1 - 2n}{6}$.

Or $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$, donc $u_n = \dfrac{1}{v_n} + 3$

donc $u_n = \dfrac{6}{-1 - 2n} + 3$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1 - 2n) = -\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{-1 - 2n} = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

110. 1. $u_1 = f(u_0) = \dfrac{2 + 3 \times 3}{4 + 3} = \dfrac{11}{7}$

2. f est dérivable sur [0 ; 4] et pour tout réel $x \in [0\,;4]$,

$$f'(x) = \frac{3(4 + x) - (2 + 3x)1}{(4 + x)^2} = \frac{10}{(4 + x)^2} > 0.$$

Donc f est strictement croissante sur [0 ; 4].
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 3$ et $u_1 = \dfrac{11}{7}$.
Donc $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 3$.
Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.
On a $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$
or f est strictement croissante sur [0 ; 4] ;
donc $f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(3)$.

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \frac{11}{7} \leqslant 3$$

Donc $P(n + 1)$ est vraie.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, soit $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$.
3. (u_n) est strictement décroissante et minorée par 1, donc elle est convergente.

4. $\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \dfrac{2+3\ell}{4+\ell}$

$\Leftrightarrow \ell(4+\ell) = 2 + 3\ell$

$\Leftrightarrow \ell^2 + \ell - 2 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$

$\ell_1 = \dfrac{-1-\sqrt{9}}{2} = -2$ et $\ell_2 = \dfrac{-1+\sqrt{9}}{2} = 1$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant 3$.

Donc $1 \leqslant \ell \leqslant 3$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

111. A. Étude de la suite (u_n)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $3 \times 2^0 + 0 - 2 = 1$, donc $u_0 = 3 \times 2^0 + 0 - 2$

donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$

$= 2(3 \times 2^n + n - 2) - n + 3$

$= 3 \times 2^{n+1} + 2n - 4 - n + 3$

$= 3 \times 2^{n+1} + n + 1 - 2$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, soit $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.

2. $2 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3. a)

```
u = 1
n = 0
while u <= 1000000 :
    n = n+1
    u = 3*2**n+n-2
print(n)
```

b) Le rang correspondant est $n = 19$.

B. Étude de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{3 \times 2^n + n - 2}{2^n} = 3 + \dfrac{n-2}{2^n}$

donc $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \dfrac{u_n}{v_n} = 3 + \dfrac{n-1}{2^{n+1}} - \left(3 + \dfrac{n-2}{2^n}\right)$

$= \dfrac{n-1}{2^{n+1}} - \dfrac{n-2}{2^n}$

$= \dfrac{n-1-2(n-2)}{2^{n+1}}$

$= \dfrac{-n+3}{2^{n+1}}$

si $n \geqslant 3$, alors $-n \leqslant -3$, donc $-n + 3 \leqslant 0$.

Donc $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \dfrac{u_n}{v_n} \leqslant 0$.

Donc la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.

2. $\dfrac{u_n}{v_n} = 3 + \dfrac{n}{2^n} - \dfrac{2}{2^n}$

Or si $n \geqslant 4$, $0 < \dfrac{n}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$.

De plus, $2 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{2^n} = 0$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 3$.

112. 1. $u_0 = -3$; $u_1 = 2u_0 + 4 = -2$; $u_2 = 2u_1 + 4 = 0$; $u_3 = 2u_2 + 4 = 4$.

2.

```
u = -3
for i in range(1,21):
    u = 2*u+4
print(u)
```

3. $u_{20} = 1\ 048\ 572$

113. A. Conjecture

1. Il faut rentrer =B2/(B2+8).

2. On conjecture que la suite (u_n) est strictement décroissante et tend vers 0.

3.
```
u=1
for i in range(1,31):
    u=u/(u+8)
print(u)
```

B. Étude générale

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $u_n > 0$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 1 > 0$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.

On a $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 8}$. Or $u_n > 0$, donc $u_{n+1} > 0$.

Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, soit $u_n > 0$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{u_n + 8}$.

Or $u_n > 0$, donc $u_n + 8 > 8$, donc $\dfrac{1}{u_n + 8} < \dfrac{1}{8}$.

Donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$. Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

3. La suite (u_n) est strictement décroissante, et minorée par 0. Donc elle est convergente.

C. Expression du terme général

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = 1 + \frac{7}{u_{n+1}} = 1 + \frac{7}{\dfrac{u_n}{u_n + 8}} = 1 + \frac{7(u_n + 8)}{u_n}$$

donc $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 7u_n + 56}{u_n} = \dfrac{8 \times (u_n + 7)}{u_n}$

donc $v_{n+1} = 8 \times \left(1 + \dfrac{7}{u_n}\right) = 8v_n$.

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 8 et de premier terme $v_0 = 1 + \dfrac{7}{u_0} = 8$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 8 \times 8^n = 8^{n+1}$.

Or $v_n = 1 + \dfrac{7}{u_n}$. Donc $\dfrac{7}{u_n} = v_n - 1$.

Soit $u_n = \dfrac{7}{v_n - 1}$. Donc $u_n = \dfrac{7}{8^{n+1} - 1}$.

3. $8 > 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 8^n = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 8^{n+1} - 1 = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

4. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, donc tout intervalle ouvert contenant 0 contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Donc il existe un entier n_0, tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \in]-10^{-18} ; 10^{-18}[$, donc $u_n < 10^{-18}$.

D'après la calculatrice, $n_0 = 20$.

Suite géométrique et somme

114. a) $u_n = 5^n\left(1 - \left(\dfrac{0,2}{5}\right)^n\right) = 5^n(1 - 0,04^n)$

$-1 < 0,04 < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,04^n = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - 0,04^n = 1$.

$5 > 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 5^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

b) $v_n = 6^n\left(1 - \left(\dfrac{7}{6}\right)^n\right)$

$\dfrac{7}{6} > 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{7}{6}\right)^n = +\infty$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \left(\dfrac{7}{6}\right)^n = -\infty$.

$6 > 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 6^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

c) $w_n = 9^n\left(1 - \left(\dfrac{8}{9}\right)^n\right)$

$-1 < \dfrac{8}{9} < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{8}{9}\right)^n = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \left(\dfrac{8}{9}\right)^n = 1$

$9 > 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 9^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$.

115. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Or $-1 < \frac{1}{4} < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

2. Soit q la raison de la suite (u_n).

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} \\ &= u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \ldots + u_0 \times q^{n-1} \\ &= u_0 \times (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) \\ &= u_0 \times \frac{1-q^n}{1-q} \\ &= 5 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} \\ &= \frac{20}{3} \times \left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \end{aligned}$$

$-1 < \frac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n = 1$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{20}{3}$.

116. 1. Soit q la raison de la suite (u_n).

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n \\ &= u_1 + u_1 \times q + u_1 \times q^2 + \ldots + u_1 \times q^{n-1} \\ &= u_1 \times (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) \\ &= u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} \\ &= 4 \times \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}} \\ &= 5 \times \left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right) \end{aligned}$$

2. $-1 < \frac{1}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1-\left(\frac{1}{5}\right)^n = 1$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 5$.

117. 1. a)
$$\begin{aligned} S_1 &= u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n \\ &= u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \ldots + u_0 \times q^n \\ &= u_0 \times (1 + q + q^2 + \ldots + q^n) \\ &= u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\ &= 9 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{27}{2} \times \left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} S_1 &= u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n+1} \\ &= u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \ldots + u_0 \times q^{n+1} \\ &= u_0 \times (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n+1}) \\ &= u_0 \times \frac{1-q^{n+2}}{1-q} \\ &= 9 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}}{1-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{27}{2} \times \left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}\right) \end{aligned}$$

2. $-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} 1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_1 = \frac{27}{2}$.

118. 1. a)
$$\begin{aligned} S_{25} &= u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{24} \\ &= u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \ldots + u_0 \times q^{24} \\ &= u_0 \times (1 + q + q^2 + \ldots + q^{24}) \end{aligned}$$

$$= u_0 \times \frac{1-q^{25}}{1-q}$$

$$= -10 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{25}}{1-\frac{1}{2}}$$

Donc $S_{25} \approx -20$.

2. a) $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$

$$= u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \ldots + u_0 \times q^{n-1}$$

$$= u_0 \times (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1})$$

$$= u_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$= -10 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= -20 \times \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)$$

b) $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -20$.

119. 1. $S_n = \frac{1-5^{n+1}}{1-5} = -\frac{1}{4} \times (1-5^{n+1})$

2. $5 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n = +\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-5^{n+1}) = -\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

120. 1. $A_1 = 3^2 = 9$; $A_2 = 1{,}5^2 = 2{,}25$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_{n+1} = \frac{A_n}{4}$.

Donc (A_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_n = A_1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 9 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

4. Notons S_n l'aire formée par l'ensemble des n premiers carrés.

$S_n = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$

$$= 9 \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 + 9 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \ldots + 9 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$= 9 \times \left(\left(\frac{1}{4}\right)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right)$$

$$= 9 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$= 12 \times \left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right)$$

5. $-1 < \frac{1}{4} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 12$.

Donc si on continue indéfiniment cette construction, l'aire de la figure formée par l'ensemble des carrés sera 12 cm^2.

Étudier des phénomènes d'évolution

121. 1. $15\,000 \times \left(1-\frac{10}{100}\right) + 1\,000 = 14\,500$. Il y aura 14 500 habitant·e·s en 2020.

2. On note u_n le nombre d'habitant·e·s en 2019 + n.

En 2019, il y a 15 000 habitant·e·s, donc $u_0 = 15\,000$.

Chaque année, la mairie prévoit que 10 % des habitant·e·s quitteront la ville, et 1 000 nouveaux habitant·e·s s'installeront.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1-\frac{10}{100}\right) + 1000 = 0{,}9u_n + 1000.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $u_n = 5\,000 \times 0{,}9^n + 10\,000$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 15\,000$ et $5\,000 \times 0{,}9^0 + 10\,000 = 15\,000$.

Donc $u_0 = 5\,000 \times 0{,}9^0 + 10\,000$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.

On a $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 1\,000$

$u_{n+1} = 0{,}9 \times (5\,000 \times 0{,}9^n + 10\,000) + 1\,000$

$= 5\,000 \times 0{,}9^{n+1} + 10\,000$

donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5\,000 \times 0{,}9^n + 10\,000$.

4. $-1 < 0{,}9 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}9^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 10\,000$.

Le nombre d'habitant·e·s de la ville tend vers 10 000.

122. 1. $100 \times \left(1 - \dfrac{10}{100}\right) + 5 = 95$.

Donc en 2021, il y aura 95 tigres dans la réserve.

2. $u_0 = 100$. Et chaque année, 10 % de la population de tigres meurt, et 5 nouveaux tigres sont recueillis dans la réserve.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \dfrac{10}{100}\right) + 5 = 0{,}9u_n + 5$.

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$P(n)$: « $50 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 100$ et $u_1 = 95$. Donc $50 \leqslant u_1 \leqslant u_0$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.

On a $50 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

$0{,}9 \times 50 + 5 \leqslant 0{,}9u_{n+1} + 5 \leqslant 0{,}9u_n + 5$

Donc $50 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.

Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, soit $50 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

b) (u_n) est strictement décroissante et minorée par 50, donc elle est convergente.

4. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 50$

$= 0{,}9u_n + 5 - 50$

$= 0{,}9u_n - 45$

$= 0{,}9\left(u_n - \dfrac{45}{0{,}9}\right)$

$= 0{,}9(u_n - 50)$

$= 0{,}9v_n$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}9$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 50 = 50$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 50 \times 0{,}9^n$.

Or $v_n = u_n - 50$, donc $u_n = v_n + 50$.

Donc $u_n = 50 \times 0{,}9^n + 50$.

c) $-1 < 0{,}9 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}9^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 50$.

d) Le nombre de tigres diminue et tend vers 50.

123 A. 1. $u_1 = 16\,000 \times \left(1 - \dfrac{15}{100}\right) = 13\,600$

$u_2 = 13\,600 \times \left(1 - \dfrac{15}{100}\right) = 11560$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \dfrac{15}{100}\right) = 0{,}85u_n$

donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}85$.

Donc $u_n = u_0 \times q^n = 16\,000 \times 0{,}85^n$.

3. $-1 < 0{,}85 < 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}85^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4. a)

```
u = 16000
n = 0
while u > 2000 :
    n = n+1
    u = 0.85*u
print(n)
```

b) La valeur de `n` à la fin du programme est 13.

B. 1. Le 1er juillet, elle prélève 15 % du capital disponible pour préparer ses vacances. Le 1er décembre, elle rajoute 300 €.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0{,}85v_n + 300$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$P(n)$: « $v_n = 14\,000 \times 0{,}85^n + 2\,000$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $v_0 = 16\,000$ et

$14\,000 \times 0{,}85^0 + 2\,000 = 16\,000$

donc $v_0 = 14\,000 \times 0{,}85^0 + 2\,000$

donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.

On a $v_{n+1} = 0{,}85v_n + 300$
$= 0{,}85(14\,000 \times 0{,}85^n + 2\,000) + 300$
$= 14\,000 \times 0{,}85^{n+1} + 2\,000$
donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, soit $v_n = 14\,000 \times 0{,}85^n + 2\,000$.

3. $-1 < 0{,}85 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}85^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2\,000$.

124. A. 1. $u_1 = u_0 \times \left(1+\dfrac{6}{100}\right) = 530$

$u_2 = u_1 \times \left(1+\dfrac{6}{100}\right) \approx 562$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} = u_n \times \left(1+\dfrac{6}{100}\right) = 1{,}06u_n$

donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}06$.

Donc $u_n = u_0 \times q^n = 500 \times 1{,}06^n$.

3. $1{,}06 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}06^n = +\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

B. 1.

```
u = 500
n = 0
while u < 1000 :
    n = n+1
    u = 1.06*u
print(n)
```

2. La valeur affichée à la fin de l'exécution de ce programme est 12.

Donc le nombre de films aura doublé à partir de 12 mois (ou un an) après l'ouverture.

C. 1. Chaque mois, 10 % des personnes se désabonnent, et il y a 2 500 nouveaux abonnés.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$v_{n+1} = \left(1-\dfrac{10}{100}\right)v_n + 2\,500 = 0{,}9v_n + 2\,500.$

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = v_{n+1} - 25\,000$
$= 0{,}9v_n + 2500 - 25\,000$
$= 0{,}9v_n - 22\,500$
$= 0{,}9\left(v_n - \dfrac{22\,500}{0{,}9}\right)$
$= 0{,}9(v_n - 25\,000)$
$= 0{,}9w_n$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}9$ et de premier terme
$w_0 = v_0 - 25\,000 = -10\,000$.

b) Donc $w_n = w_0 \times q^n = -10\,000 \times 0{,}9^n$
or $w_n = v_n - 25\,000$, donc $v_n = w_n + 25\,000$.
Donc $v_n = -10\,000 \times 0{,}9^n + 25\,000$.

3. $-1 < 0{,}9 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}9^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 25\,000$.

On peut donc prévoir une stabilisation du nombre d'abonnés, autour de 25 000.

125. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n = 1$.

2. Chaque année, Electic perd 5 % de ses clients, mais récupère 15 % des clients de Energo. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$a_{n+1} = \left(1-\dfrac{5}{100}\right)a_n + \dfrac{15}{100}b_n = 0{,}95a_n + 0{,}15b_n.$

3. Donc $a_{n+1} = 0{,}95a_n + 0{,}15(1 - a_n)$
$= 0{,}8a_n + 0{,}15$.

4. a) 2030 = 2020 + 10. Il faut donc calculer a_{10}.

```
a = 0.55
for i in range(1,11):
    a = 0.8*a + 0.15
print(a)
```

b) $a_{10} \approx 0{,}729$. Donc en 2030, Electic aura environ 72,9 % des parts de marché.

5. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant 0{,}75$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $a_0 = 0{,}55$ et
$a_1 = 0{,}8a_0 + 0{,}15 = 0{,}59$.
Donc $a_0 \leqslant a_1 \leqslant 0{,}75$.
Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant 0{,}75$.
$0{,}8a_n + 0{,}15 \leqslant 0{,}8a_{n+1} + 0{,}15 \leqslant 0{,}8 \times 0{,}75 + 0{,}15$
Donc $a_{n+1} \leqslant a_{n+2} \leqslant 0{,}75$.
Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, soit $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant 0{,}75$.

b) (a_n) est strictement croissante et majorée par 0,75, donc elle est convergente.

$\ell = 0{,}8\ell + 0{,}15 \Leftrightarrow 0{,}2\ell = 0{,}15 \Leftrightarrow \ell = 0{,}75$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0{,}75$.

c) Le pourcentage des parts de marchés de Electic augmentera et tendra vers 75 %.

126. 1. En 2010, le magazine n'est proposé que sous forme papier, donc $a_0 = 100\ \% = 1$

et $b_0 = 0\ \% = 0$. Chaque année,

– 10 % des abonnés à la version papier passent à la version numérique ;

– 6 % des abonnés à la version numérique passent à la version papier ;

– le nombre global d'abonnés reste constant.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \left(1 - \frac{10}{100}\right)a_n + \frac{6}{100}b_n.$$
$$= 0{,}9a_n + 0{,}06b_n.$$

2. Or $a_n + b_n = 1$.

Donc $a_{n+1} = 0{,}9a_n + 0{,}06(1 - a_n)$

Donc $a_{n+1} = 0{,}84a_n + 0{,}06$.

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = a_{n+1} - 0{,}375$

$$= 0{,}84a_n + 0{,}06 - 0{,}375$$
$$= 0{,}84a_n - 0{,}315$$
$$= 0{,}84\left(a_n - \frac{0{,}315}{0{,}84}\right)$$
$$= 0{,}84(a_n - 0{,}375)$$
$$= 0{,}84c_n$$

donc (c_n) est une suite géométrique de raison 0,84 et de premier terme $c_0 = a_0 - 0{,}375 = 0{,}625$.

b) Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = 0{,}625 \times 0{,}84^n$.

c) Or $v_n = a_n - 0{,}375$, donc $a_n = v_n + 0{,}375$.

Donc $a_n = 0{,}625 \times 0{,}84^n + 0{,}375$.

Et $b_n = 1 - a_n = 0{,}625 - 0{,}625 \times 0{,}84^n$.

d) $-1 < 0{,}84 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}84^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0{,}375$.

4. On cherche le plus petit entier n tel que $a_n < b_n$, soit $a_n < 0{,}5$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve $n = 10$. Donc en 2020, la proportion d'abonné·e·s à la version papier devient inférieure à la proportion d'abonné·e·s à la version numérique.

127. Travail de l'élève.

128. Travail de l'élève.

129. Travail de l'élève.

Exercices bilan p. 38

130. Démontrer par récurrence

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$:

« $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) = (n + 1)^2$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $1 = (0 + 1)^2$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.

$1 + 3 + \ldots + (2n + 1) + (2n + 3)$

$= (n + 1)^2 + 2n + 3$

$= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3$

$= n^2 + 4n + 4$

$= (n + 2)^2$

Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc $1 + 3 + \ldots + (2n + 1) = (n + 1)^2$

131. Déterminer la limite d'une suitre

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{n^2\left(1 + \frac{3}{n} - \frac{8}{n^2}\right)}{n^3\left(2 + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^3}\right)} = \frac{1 + \frac{3}{n} - \frac{8}{n^2}}{n\left(2 + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^3}\right)}$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{3}{n} - \frac{8}{n^2} = 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2 + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^3}\right) = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$.

Donc $\sqrt{n} - 1 \leqslant v_n \leqslant \sqrt{n} + 1$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} - 1 = +\infty$. Donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$.

Donc $25 - \dfrac{1}{n} \leqslant w_n \leqslant 25 + \dfrac{1}{n}$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 25 + \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} 25 - \dfrac{1}{n} = 25$

donc d'après le théorème des gendarmes,

$\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 25$.

4. $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

Et $2 > 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 3^n\left(1 - \left(\dfrac{4}{3}\right)^n\right)$.

Or $\dfrac{4}{3} > 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{4}{3}\right)^n = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \left(\dfrac{4}{3}\right)^n = -\infty$.

Et $3 > 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 3^n = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = -\infty$.

132. Étudier la convergence d'une suite

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $0 < u_n < 1$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 0{,}5$.

Donc $0 < u_0 < 1$.

Donc la propriété est vraie pour $n=0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.

On a $0 < u_n < 1$ et $0 < 1 - u_n < 1$.

Donc $0 < u_n(1 - u_n) < 1$, soit $0 < u_{n+1} < 1$.

Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, soit $0 < u_n < 1$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

Donc $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 < 0$.

Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

3. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Donc elle est convergente.

133. Étude de l'évolution de la population de singes

A. Premier modèle

1. $u_0 = 1$ et $u_1 = 1{,}04 \times 1 = 1{,}04$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1{,}04u_n$.

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}04$.

Donc $u_n = u_0\, q^n = 1 \times 1{,}04^n = 1{,}04^n$.

3. $1{,}04 > 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

4. Ce modèle n'est pas réaliste. Les singes seront confrontés à un problème de place et de ressources.

B. Second modèle

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$f'(x) = -\dfrac{1}{20}x + 1{,}1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1{,}1}{\dfrac{1}{20}} \Leftrightarrow x = 22$.

x	$-\infty$		22		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$12{,}1$	$\searrow$	

Donc f est strictement croissante sur $[0 ; 10]$.

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $0 \leqslant v_n \leqslant 4$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $v_0 = 1$ donc $0 \leqslant v_0 \leqslant 4$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.

On a $0 \leqslant v_n \leqslant 4$.

Donc $f(0) \leqslant f(v_n) \leqslant f(4)$ car la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; 10]$.

Donc $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.

Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, soit $0 \leqslant v_n \leqslant 4$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{40}v_n^2 + 1{,}1v_n - v_n$$

$$= -\frac{1}{40}v_n^2 + 0{,}1v_n$$

$$= v_n \times \left(-\frac{1}{40}v_n + 0{,}1\right)$$

or $0 \leqslant v_n \leqslant 4$

donc $0 \geqslant -\frac{1}{40}v_n \geqslant -0{,}1$

$$0 + 0{,}1 \geqslant -\frac{1}{40}v_n + 0{,}1 \geqslant 0$$

donc $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$. Donc la suite (v_n) est croissante.

c) (v_n) est croissante et majorée par 4, donc elle est convergente.

d) $\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = -\frac{1}{40}\ell^2 + 1{,}1\ell$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{40}\ell^2 + 0{,}1\ell = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell \ -\frac{1}{40}\ell + 0{,}1 \ = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } -\frac{1}{40}\ell + 0{,}1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } \ell = 4$$

Or la suite (v_n) est croissante, et $v_0 = 1$.

Donc $\ell = 4$.

3.

```
n=0
v=1
while v<=3:
    v=-1/40*v**2+1.1*v
    n=n+1
print(n)
```

134. Évolution du nombre d'arbres dans une forêt

1. $u_0 = 2\,500$

$$u_1 = 2\,500 \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 100 = 2\,350$$

2. Chaque année, 10 % des arbres sont coupés, et 100 arbres sont replantés.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 100 = 0{,}9u_n + 100.$$

3. a) 2 050 = 2 020 + 30.

On cherche donc à calculer u_{30}.

```
u=2500
for i in range(1,31):
    u=0.9*u+100
print(u)
```

b) En 2050, il y aura environ 1 064 arbres dans la forêt.

4. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $1\,000 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 2\,500$ et $u_1 = 2\,350$ donc $1\,000 \leqslant u_1 \leqslant u_0$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.

On a $1\,000 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$

$0{,}9 \times 1\,000 + 100 \leqslant 0{,}9u_{n+1} + 100 \leqslant 0{,}9u_n + 100$

donc $1\,000 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$

donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, soit $1\,000 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

b) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 000. Donc elle est convergente.

5. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1\,000$$
$$= 0{,}9u_n + 100 - 1\,000$$
$$= 0{,}9u_n - 900$$
$$= 0{,}9(u_n - 1\,000)$$
$$= 0{,}9v_n$$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}9$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 1\,000 = 1\,500$

b) Donc $v_n = v_0 \times q^n = 1\,500 \times 0{,}9^n$

or $v_n = u_n - 1\,000$ donc $u_n = v_n + 1\,000$.

Donc $u_n = 1\,500 \times 0{,}9^n + 1\,000$.

c) $-1 < 0{,}9 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}9^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1000$.

Le nombre d'arbres dans la forêt diminue et tend vers 1 000.

Préparer le BAC
Je me teste p. 40

135. C et **D**

136. **A**

137. **C**

138. **A**

139. **B**

140. **B**

141. **C**

142. **A** et **C**

Préparer le BAC
Je révise p. 41

143. Récurrence

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$P(n)$: « 2 divise $3^n - 1$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $3^0 - 1 = 0$, donc 2 divise $3^0 - 1$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $3^{n+1} - 1 = 3 \times 3^n - 1$

or 2 divise $3^n - 1$, donc $3^n - 1 = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Donc $3^n = 1 + 2k$.

Donc $3^{n+1} = 3 \times (1 + 2k) - 1$

$= 3 \times 2k + 2$

$= 2 \times (3k + 1)$

donc 2 divise 3^{n+1}.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, 2 divise $3^n - 1$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$P(n)$: « $u_n = 3 \times 2^n + 1$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 4$ et $3 \times 2^0 + 1 = 4$. Donc $u_0 = 3 \times 2^0 + 1$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $u_{n+1} = 2u_n - 1$

donc $u_{n+1} = 2 \times (3 \times 2^n + 1) - 1$

$= 3 \times 2^{n+1} + 1$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 2^n + 1$.

144. Limite d'une suite

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{3}{2}$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$. **d)** $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 3$.

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$. **f)** $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = -\infty$.

145 Compte en banque

1. $u_1 = 5\,750$ et $u_2 = 6\,312{,}5$

2. Chaque mois, elle dépense le quart de ce qu'elle a sur son compte. De plus elle dépose 2 000 € le dernier jour de chaque mois.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \frac{25}{100}\right) + 2\,000 = 0{,}75u_n + 2\,000$$

3. a)

```
u=5000
for i in range(1,13):
    u=0.75*u+2000
print(u)
```

b) Elle a 7 904,97 € sur son compte le 1er janvier 2020.

4. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$P(n)$: « $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 8\,000$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 5\,750$ et $u_1 = 6\,312{,}5$.

Donc $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 8\,000$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 8\,000$

$0{,}75u_n + 2\,000 \leqslant 0{,}75u_{n+1} + 2\,000 \leqslant 0{,}75 \times 8\,000 + 2\,000$

donc $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 8\,000$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 8\,000$.

b) La suite (u_n) est croissante et majorée, donc elle est convergente.

5. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$v_{n+1} = u_{n+1} - 8\,000$
$= 0{,}75u_n + 2\,000 - 8\,000$
$= 0{,}75(u_n - 8\,000)$
$= 0{,}75v_n$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75, de premier terme $v_0 = u_0 - 8\,000 = -3\,000$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -3\,000 \times 0{,}75^n$.

$v_n = u_n - 8\,000$, donc $u_n = v_n + 8\,000$

Donc $u_n = 8\,000 - 3\,000 \times 0{,}75^n$.

6. $-1 < 0{,}75 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}75^n = 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 8\,000$.

La somme sur le compte tendra vers 8 000 €.

146. Évolution d'une population de tortues

A. 1. $u_1 = 0{,}9 \times 0{,}3 \times (1 - 0{,}3) = 0{,}189$;

$u_2 \approx 0{,}138$.

Il y a 189 tortues en 2001 et environ 138 en 2002.

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant 1 - u_n \leqslant 1$.

Donc $0 \leqslant 0{,}9u_n(1 - u_n) \leqslant 0{,}9u_n$ car $u_n \geqslant 0$.

Donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0{,}9u_n$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$P(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant 0{,}3 \times 0{,}9^n$»

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 0{,}3$ et $0{,}3 \times 0{,}9^0 = 0{,}3$.

Donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 0{,}3$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.

On a $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0{,}9u_n$.

Donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0{,}9 \times 0{,}3 \times 0{,}9^n$

donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0{,}3 \times 0{,}9^{n+1}$.

Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 0{,}3 \times 0{,}9^n$

c) $-1 < 0{,}9 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}9^n = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}3 \times 0{,}9^n = 0$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Cette population de tortues est donc en voie d'extinction.

3.

```
u=0.3
n=0
while u>=30 :
    u=0.9*u*(1-u)
    n=n+1
print(2000+n-1)
```

B. 1. $v_{11} = 1{,}06 \times 0{,}032 \times (1 - 0{,}032) \approx 0{,}033$

$v_{12} \approx 0{,}034$

Il y a environ 33 tortures en 2011 et environ 34 en 2012.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}06v_n(1 - v_n)$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \ell$.

Donc $\ell = 1{,}06 \times \ell \times (1 - \ell)$.

3. La suite (v_n) est croissante.

Donc pour tout $n \geqslant 10$, $v_n \geqslant v_{10}$.

Donc $v_n \geqslant 0{,}032$.

Donc la population de tortues n'est plus en voie d'extinction.

Exercices vers le supérieur p. 42-43

147. Somme par récurrence

Voir exercice résolu 1 page 17.

148. Abonnement sportif

Les bonnes réponses sont : a) et b).

a) Vrai $a_1 = 1\,500 \times \left(1 - \dfrac{40}{100}\right) + 400 = 1300$

b) Vrai chaque année, 40 % des abonnements ne sont pas renouvelés, et il y a 400 nouveaux abonnés. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$a_{n+1} = \left(1 - \dfrac{40}{100}\right)a_n + 400 = 0{,}6a_n + 400.$

c) Faux pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = a_{n+1} - 1\,000$
$= 0{,}6a_n + 400 - 1\,000$
$= 0{,}6(a_n - 1\,000)$
$= 0{,}6v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}6$.

d) Faux $v_0 = a_0 - 1\,000 = 500$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 0{,}6^n$

or $v_n = a_n - 1\ 000$, donc $a_n = v_n + 1\ 000$

$a_n = 500 \times 0{,}6^n + 1\ 000$.

149. Vrai-Faux (1)

Vrai soit (u_n) une suite croissante, admettant une limite finie ℓ.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leqslant u_n \leqslant \ell$.

Donc (u_n) est bornée.

150. Somme télescopique

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n + 1 = +\infty$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

donc $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}.$$

4. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$.

151. Vrai-Faux (2)

1. Faux contre-exemple : $u_n = n + (-1)^n$

$u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 3$, $u_3 = 2$. La suite (u_n) n'est pas monotone, mais a pour limite $+\infty$.

2. Vrai démontrons cela par récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $u_n = 3^n + n - 1$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 0$ et $3^0 + 0 - 1 = 0$. Donc $u_0 = 3^0 + 0 - 1$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.

On a $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$

$= 3(3^n + n - 1) - 2n + 3$

$= 3^{n+1} + n$

$= 3^{n+1} + n + 1 - 1$

donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, soit $u_n = 3^n + n - 1$.

152. Suites adjacentes

1. La suite (v_n) est décroissante, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant v_0$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$. Donc $u_n \leqslant v_0$.

La suite (u_n) est croissante et majorée par v_0. Donc elle est convergente.

La suite (u_n) est croissante, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_0$.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$. Donc $u_0 \leqslant v_n$.

La suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0. Donc elle est convergente.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2. La suite (u_n) est croissante et a pour limite ℓ.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout entier $p \geqslant n$, $u_p \geqslant u_n$.

En faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient $\ell \geqslant u_n$.

La suite (v_n) est décroissante et a pour limite ℓ. De même on montre que $\ell \leqslant v_n$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$.

Donc (u_n) est strictement croissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n$

$$= u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)\times(n+1)!} - u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\times(n+1)!} - \frac{1}{n \times n!}$$

$$= \frac{n(n+1) + n - (n+1)(n+1)}{n(n+1)(n+1)!}$$

$$= \frac{n^2 + n + n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)(n+1)!}$$

$$= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!}$$

donc $v_{n+1} - v_n < 0$

donc (v_n) est strictement décroissante.

Et $v_n - u_n = \dfrac{1}{n \times n!}$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$

donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

b) Donc (u_n) et (v_n) sont convergentes.

c) $u_{10} \leqslant e \leqslant v_{10}$

Donc e ≈ 2,718282.

153. Suites vérifiant une relation de récurrence d'ordre 2

A. 1. $u_2 = au_1 + bu_0$

donc $u_2 = 4{,}5 \times 2 + (-2) \times 1 = 7$.

2. $x^2 = ax + b \Leftrightarrow x^2 - 4{,}5x + 2 = 0$

$\Delta = (-4{,}5)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 12{,}25$

$x_1 = \dfrac{4{,}5 - \sqrt{12{,}25}}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{4{,}5 + \sqrt{12{,}25}}{2} = 4$

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + \mu \times 4^n$.

$u_0 = \lambda\left(\dfrac{1}{2}\right)^0 + \mu \times 4^0$, donc $\lambda + \mu = 1$

$u_1 = \lambda\left(\dfrac{1}{2}\right)^1 + \mu \times 4^1$, donc $\dfrac{1}{2}\lambda + 4\mu = 2$

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \dfrac{1}{2}\lambda + 4\mu = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 1 - \lambda \\ \dfrac{1}{2}\lambda + 4(1-\lambda) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \dfrac{3}{7} \\ \lambda = \dfrac{4}{7} \end{cases}$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{4}{7}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{3}{7} \times 4^n$.

b) $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$

$4 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

B. 1. $u_2 = au_1 + bu_0$

donc $u_2 = 10 \times 2 - 25 \times 1 = -5$.

2. $x^2 = ax + b \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0$

$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 25 = 0$

$x_0 = \dfrac{10}{2} = 5$

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda \times 5^n + \mu \times n \times 5^n$.

$u_0 = \lambda(5)^0 + \mu \times 0 \times 5$, donc $\lambda = 1$

$u_1 = \lambda(5)^1 + \mu \times 1 \times 5^1$, donc $5\lambda + 5\mu = 2$

donc $\mu = -\dfrac{3}{5}$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5^n - \dfrac{3}{5}n \times 5^n$.

b) $u_n = 5^n\left(1 - \dfrac{3}{5}n\right)$.

$5 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{3}{5}n\right) = -\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

154. Clefs oubliées

À l'aide d'un arbre pondéré, on a :

$c_{n+1} = 0{,}5c_n + 0{,}3(1 - c_n) = 0{,}2c_n + 0{,}3$.

1. Vrai $c_1 = 0{,}1 \Leftrightarrow 0{,}2c_1 + 0{,}3 = 0{,}32$

$\Leftrightarrow c_2 = 0{,}32$

2. Faux $c_{n+1} = 0{,}2c_n + 0{,}3$

3. Vrai pour tout entier $n \geqslant 1$,

$8c_n = 8v_n + 3$. Donc $v_n = c_n - 0{,}375$

Donc $v_{n+1} = c_{n+1} - 0{,}375$

$= 0{,}2c_n + 0{,}3 - 0{,}375$

$= 0{,}2\ \ c_n - \dfrac{0{,}075}{0{,}2}$

$= 0{,}2(c_n - 0{,}375)$

$= 0{,}2v_n$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,2.

4. Vrai pour tout entier $n \geqslant 1$,

$v_n = v_1 \times 0{,}2^{n-1}$.

Or $v_n = c_n - 0{,}375$, donc $c_n = v_n + 0{,}375$

soit $c_n = v_1 \times 0{,}2^{n-1} + 0{,}375$.

Or $-1 < 0{,}2 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}2^{n-1} = 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0{,}375$.

155. Limites de deux suites

a) (u_n) converge vers ℓ_1 et (v_n) converge vers ℓ_2.

Donc $\ell_1 = \dfrac{3\ell_1 + \ell_2}{4}$ et $\ell_2 = \dfrac{\ell_1 + 5\ell_2}{6}$

$\dfrac{\ell_1}{4} = \dfrac{\ell_2}{4}$ et $\dfrac{\ell_2}{6} = \dfrac{\ell_1}{6}$. Donc $\ell_1 = \ell_2$.

156. Vrai-Faux (3)

1. [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur dans l'expression de u_n. Les éditions suivantes et la correction ci-dessous utilisent $u_n = 2 + (2 + 2^2 + ... + 2^n)$.

Vrai pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} u_n &= 2 \times (1 + 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1}) \\ &= 2 \times \left(1 + \frac{1-2^n}{1-2}\right) \\ &= 2 \times (1 - (1 - 2^n)) \\ &= 2^{n+1} \end{aligned}$$

Donc u_n est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_1 = 4$.

$v_1 = u_1 - 1 = 3$; $v_2 = u_2 - 1 = 7$; $v_3 = u_3 - 1 = 15$.

Or $\dfrac{v_3}{v_2} \neq \dfrac{v_2}{v_1}$.

Donc (v_n) n'est pas une suite géométrique.

2. Vrai $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = \ell$.

Donc tout intervalle contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, c'est-à-dire, pour tous réels a et b strictement positifs, il existe un entier p tel que pour tout $n \geqslant p$,

$\ell - a < nu_n < \ell + b$

$\dfrac{\ell - a}{n} < u_n < \dfrac{\ell + b}{n}$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ell - a}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ell + b}{n} = 0$

donc d'après le théorème des gendarmes,

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3. Vrai démontrons cela par récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $u_n = n + 1$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 1 = 0 + 1$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} \text{On a } u_{n+1} &= 10u_n - 9n - 8 \\ &= 10(n + 1) - 9n - 8 \\ &= n + 2 \end{aligned}$$

donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, soit $u_n = n + 1$.

157. Vrai-Faux (4)

1. Faux $\dfrac{u_1}{u_0} = \mathrm{e}^{-u_0}$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \mathrm{e}^{-u_1}$

or $u_0 \neq 0$, d'où $\mathrm{e}^{-u_0} \neq 1$, donc $u_0 \neq u_1$

donc $\mathrm{e}^{-u_0} \neq \mathrm{e}^{-u_1}$ et $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$.

La suite (u_n) n'est pas géométrique.

2. Faux on démontre par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

Et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \mathrm{e}^{-u_n} \leqslant \mathrm{e}^{-0}$

donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$. La suite (u_n) est décroissante.

3. Vrai voir question 2.

4. Faux la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Donc elle converge vers un réel ℓ.

$$\begin{aligned} \text{Or } \ell = \ell\,\mathrm{e}^{-\ell} &\Leftrightarrow \ell(1 - \mathrm{e}^{-\ell}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } 1 - \mathrm{e}^{-\ell} = 0 \\ &\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } \mathrm{e}^{-\ell} = \mathrm{e}^0 \\ &\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } -\ell = 0 \end{aligned}$$

donc $\ell = 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

5. Vrai voir question 4.

158. Convergence de la méthode de Héron

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x,

$f'(x) = \dfrac{1}{2}\ 1 - \dfrac{2}{x^2}\ = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{x^2 - 2}{x^2}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-2		+	0	−	|	−	0	+	
x^2		+	|	+	0	+	|	+	
$f'(x)$		+	0	−	||	−	0	+	
f		$\nearrow$	$-\sqrt{2}$	$\searrow$	||	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $\sqrt{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 5$ et $u_1 = \dfrac{1}{2}\left(5 + \dfrac{2}{5}\right) = 2{,}7$.

Donc $\sqrt{2} \leqslant u_1 \leqslant u_0$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.

On a $\sqrt{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$

or f est strictement croissante sur $\left[\sqrt{2}\,;+\infty\right[$.

Donc $f(\sqrt{2}) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$

donc $\sqrt{2} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$

donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

3. La suite (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$. Donc elle est convergente.

4. $\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \dfrac{1}{2}\left(\ell + \dfrac{2}{\ell}\right)$

$$\Leftrightarrow 2\ell = \ell + \frac{2}{\ell}$$

$$\Leftrightarrow 2\ell^2 = \ell^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow \ell^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \ell = -\sqrt{2} \text{ ou } \ell = \sqrt{2}.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \leqslant u_n$. Donc $\ell = \sqrt{2}$.

5.

```
u=5
for i in range(1,101):
    u=1/2*(u+2/u)
print(u)
```

159. Récurrence forte

$u_0 = 1$; $u_1 = 3$; $u_2 = 2u_1 - u_0 = 5$; $u_3 = 2u_2 - u_1 = 7$; $u_4 = 2u_3 - u_2 = 9$.

On conjecture que $u_n = 2n + 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $u_n = 2n + 1$ ».

Initialisation : $u_0 = 1 = 2 \times 0 + 1$ et $u_1 = 3 = 2 \times 1 + 1$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ et $P(n - 1)$ sont vraies, et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.

On a $u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}$

$$= 2(2n + 1) - (2(n - 1) + 1)$$

$$= 4n + 2 - 2n + 2 - 1$$

$$= 2n + 3$$

$$= 2(n + 1) + 1$$

donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n + 1$.

160. Rationnalité d'un nombre

Posons pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S_n = \frac{12}{10^2} + \frac{12}{10^4} + \frac{12}{10^6} + \ldots + \frac{12}{10^{2n}}.$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 0{,}1212121212\ldots$

de plus,

$$S_n = \frac{12}{10^2}\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \ldots + \frac{1}{10^{2n-2}}\right)$$

$$= \frac{12}{100}\left(1 + \left(\frac{1}{10^2}\right)^1 + \left(\frac{1}{10^2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{10^2}\right)^{n-1}\right)$$

$$= \frac{12}{100} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{10^2}\right)^n}{1 - \frac{1}{10^2}}$$

$$= \frac{12}{99} \times \left(1 - \left(\frac{1}{10^2}\right)^n\right)$$

or $-1 < \dfrac{1}{10^2} < 1$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{10^2}\right)^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{12}{99}$. Donc $0{,}121212\ldots = \dfrac{12}{99}$, donc $0{,}121\,212\ldots$ est un nombre rationnel.

161. Unicité de la limite

Raisonnons par l'absurde, et supposons que (u_n) admette deux limites ℓ et ℓ' distinctes avec $\ell < \ell'$.
Posons $d = \ell' - \ell$:

(u_n) tend vers ℓ donc il existe un rang p tel que pour tout $n \geqslant p$, $u_n \in \left[\ell - \frac{d}{3} ; \ell + \frac{d}{3}\right]$.

(u_n) tend vers ℓ' donc il existe un rang p' tel que pour tout $n \geqslant p'$, $u_n \in \left[\ell' - \frac{d}{3} ; \ell' + \frac{d}{3}\right]$.

Donc pour tout entier n supérieur à p et à p', on a

$u_n = \left[\ell - \frac{d}{3} ; \ell + \frac{d}{3}\right] \cap \left[\ell' - \frac{d}{3} ; \ell' + \frac{d}{3}\right]$;

ce résultat est absurde car

$\left[\ell - \frac{d}{3} ; \ell + \frac{d}{3}\right] \cap \left[\ell' - \frac{d}{3} ; \ell' + \frac{d}{3}\right] = \varnothing$.

Donc il y a unicité de la limite.

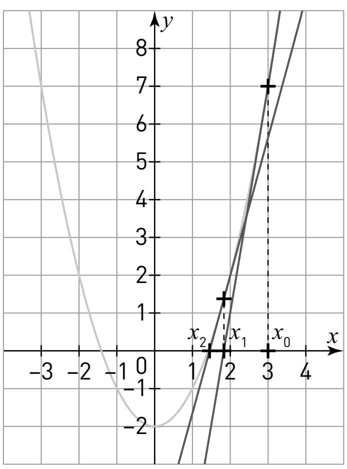
Travaux Pratiques p. 44-47

TP 1. Application de la méthode de Newton

- **Durée estimée :** 45 min
- **Objectif :** Découvrir et utiliser la méthode de Newton, afin de trouver des valeurs approchées des solutions d'une équation de la forme $f(x) = 0$.

A. Étude d'un exemple

1. 2. 3. 4. et **5.**



B. Calcul des premiers termes

1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$

donc $S = \{-\sqrt{2} ; \sqrt{2}\}$.

2. $y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$
$= 2x_n(x - x_n) + x_n^{\,2} - 2$
$= 2x_nx - x_n^{\,2} - 2$

3. $y = 0 \Leftrightarrow 2x_nx - x_n^{\,2} - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{x_n^2 + 2}{2x_n}$

donc $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + 2}{2x_n} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right)$.

4. $x_1 = \dfrac{1}{2}\left(x_0 + \dfrac{2}{x_0}\right) = \dfrac{11}{6}$

$x_2 = \dfrac{1}{2}\left(x_1 + \dfrac{2}{x_1}\right) = \dfrac{193}{132}$

5.

```
x=3
for i in range(1,11):
    x=1/2*(x+2/x)
print(x)
```

6. $x_{10} \approx 1{,}414\,213\,56$

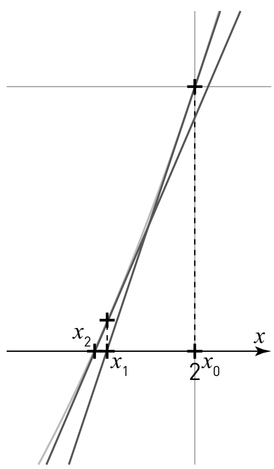
C. Étude d'un deuxième exemple

1. $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$

$x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Donc $S = \left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} ; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

2.



3. $y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$
$= (2x_n - 1)(x - x_n) + x_n^2 - x_n - 1$
$= (2x_n - 1)x - x_n^2 - 1$

4. $y = 0 \Leftrightarrow (2x_n - 1)x - x_n^2 - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{x_n^2+1}{2x_n-1}$$

Donc $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2+1}{2x_n-1}$.

5. $x_1 = \dfrac{x_0^2+1}{2x_0-1} = \dfrac{5}{3}$

$x_2 = \dfrac{x_1^2+1}{2x_1-1} = \dfrac{34}{21}$

6.

```
x=2
for i in range(1,11):
    x=(x**2+1)/(2*x-1)
print(x)
```

TP 2. Paradoxe de Zénon

- **Durée estimée :** 45 min
- **Objectif :** Découvrir le paradoxe de Zénon en modélisant des suites à l'aide d'un tableur.

A. Étude à l'aide d'un tableur

1. Question sur ordinateur.

2. Dans la cellule B2, il faut rentrer 0.
Dans la cellule C2, il faut rentrer 900.

3. Dans la cellule D2, il faut rentrer =C2–B2.

4. Lorsque Achille court k mètres, la tortue parcourt $\dfrac{k}{10}$ mètres.

5. Dans la cellule B3, il faut rentrer =C2
dans la cellule C3, il faut rentrer
=C2+(B3-B2)/10.

6. Question sur ordinateur.

7. On conjecture que

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = 1000 \;;\; \lim_{n\to+\infty} T_n = 1000 .\; \lim_{n\to+\infty}(T_n - A_n) = 0$$

B. Étude théorique

1. Entre l'étape n et l'étape $n + 1$, Achille parcourt ce qu'a parcouru la tortue entre l'étape $n - 1$ et l'étape n. Donc $v_n = u_{n-1}$.
De plus, si Achille court k mètres, la tortue parcourt $\dfrac{k}{10}$ mètres. Donc $u_n = \dfrac{v_n}{10}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{v_{n+1}}{10} = \dfrac{u_n}{10}$.
Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$ et de premier terme $u_0 = \dfrac{900}{10} = 90$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 90 \times \left(\dfrac{1}{10}\right)^n$.

Et $v_n = u_n \times 10 = 900 \times \left(\dfrac{1}{10}\right)^n$.

4. $T_n = 900 + u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$

$$= 900 + u_0 + u_0\left(\frac{1}{10}\right) + \ldots + u_0\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$
$$= 900 + u_0\left(1 + \left(\frac{1}{10}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}\right)$$
$$= 900 + 90 \times \frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}$$
$$= 900 + 100 \times \left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right)$$
$$= 1000 - 100\left(\frac{1}{10}\right)^n$$

$A_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$

$$= v_0 + v_0\left(\frac{1}{10}\right) + \ldots + v_0\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$
$$= v_0\left(1 + \left(\frac{1}{10}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}\right)$$
$$= 900 \times \frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}$$
$$= 1000\left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right)$$
$$= 1000 - 1000\left(\frac{1}{10}\right)^n$$

5. $T_n - A_n = 1\,000 - 100\left(\frac{1}{10}\right)^n - \left(1000 - 1000\left(\frac{1}{10}\right)^n\right)$

$= 1000\left(\frac{1}{10}\right)^n - 100\left(\frac{1}{10}\right)^n$

$= 900\left(\frac{1}{10}\right)^n$

6. $-1 < \frac{1}{10} < 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = 1000$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = 1000$

$\lim\limits_{n\to+\infty} T_n - A_n = 0$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n - A_n > 0$.
Donc $T_n > A_n$.
Donc Achille ne dépassera pas la tortue.

C. Deuxième modélisation

Pour tout $\in \mathbb{N}$, $A_n = 10n$
et $T_n = 900 + n$.
or $A_n > T_n \Leftrightarrow 10n > 900 + n$
$\Leftrightarrow n > 100$.
donc Achille dépassera la tortue au bout de 100 secondes.

TP 3. Modèle de Malthus

- **Durée estimée :** 55 min
- **Objectif :** Étudier le modèle de Malthus, qui est une modélisation d'un phénomène d'évolution de population et de ressources.

A. Cas général

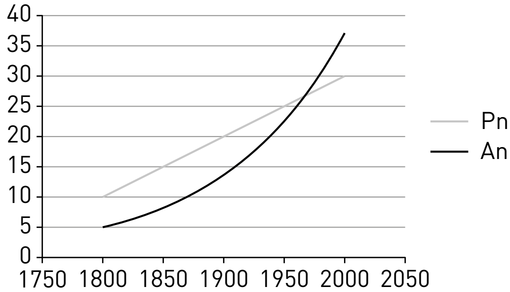
1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = (1 + r)P_n$.
2. P_n est une suite géométrique de raison $1 + r$.
Donc $P_n = P_0(1 + r)^n$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_0 + s \times n$.
4. Si $r > 0$, alors $1 + r > 1$, donc (P_n) est strictement croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = +\infty$.
Si $r < 0$, alors $1 + r < 1$, donc (P_n) est strictement décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = 0$.

5. Si $s > 0$, alors (a_n) est strictement croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.
Si $s < 0$, alors (a_n) est strictement décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

B. Étude de cas

1. et **2. a)** questions sur l'ordinateur.
2. b) Dans la cellule B2, il faut rentrer 5,
dans la cellule C2, il faut rentrer 10.
c) Dans la cellule B3, il faut rentrer =B2*1,01.
d) Dans la cellule C3, il faut rentrer =C2+0,1.
e) Question sur l'ordinateur.

3.



4. La population aura doublé en 1870, soit au bout de 70 ans.
5. La situation devient critique quand $P_n > a_n$, donc en 1970.
6.

```
n = 1800
p = 5
a = 10
while p <= a :
    p = p*1.01
    a = a+0.1
    n = n+1
print(n)
```

7. Ce modèle a ses limites, car à très long terme la population continuera toujours d'augmenter alors qu'il n'y aura pas assez de subsistances. De plus, à très long terme, la population sera confrontée à un problème de place.

TP 4. Modèle de Malthus

- **Durée estimée :** 40 min
- **Objectif :** Étudier le modèle de Verhulst, qui est une modélisation d'un phénomène d'évolution de population.

A. Comprendre l'équation logistique

1. $r - bP_n = r\left(1 - \frac{b}{r}P_n\right) = r\left(1 - \frac{P_n}{K}\right)$

2. $\lim\limits_{P_n \to 0}(r - bP_n) = r$

3. $\lim\limits_{P_n \to K}(r - bP_n) = r\left(1 - \frac{K}{K}\right)$

Donc $\lim\limits_{P_n \to K}(r - bP_n) = 0$.

4. $P_{n+1} = P_n \times (1 + (r - bP_n))$

$P_{n+1} = P_n + (r - bP_n)P_n$

Donc $P_{n+1} - P_n = (r - bP_n)P_n = rP_n\left(1 - \frac{P_n}{k}\right)$.

B. Exemple de suites

1. a) Question sur l'ordinateur.

b) Dans la cellule D2, il faut rentrer =B3.

c) Dans la cellule D3,
=D2+$B$2*D2*(1-D2/$B$1)

e) Question sur l'ordinateur.

2. a) La suite (P_n) est strictement décroissante et tend vers 15.

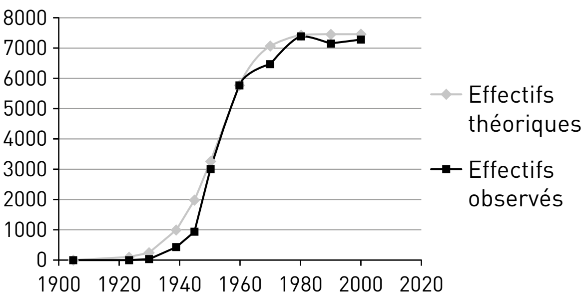
b) La suite (P_n) n'est pas monotone et tend vers 15.

c) La suite (P_n) semble alterner entre une valeur comprise entre 17 et 18, et une valeur comprise entre 9 et 10.

C. Évolution de la population d'éléphants

1. et **2.**

Année	1905	1923	1930	1939	1945	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Effectifs théoriques	10	122	317	1021	2037	3277	5859	7095	7416	7483	7497
Effectifs observés	10	13	29	450	980	3010	5800	6500	7400	7200	7310



3. D'après le graphique de la question 2, ce modèle semble cohérent.