Nom et prénom : ....

Exercice 1. 4 points

1. (u_n) est la suite géométrique telle que $u_0 = -6$ et de raison 3. Calculer u_4.
2. Soit (u_n) la suite arithmétique telque $u_5 = 14$ et $u_{25} = 26$. Déterminer la raison de la suite (u_n).
3. (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 3$.

   Calculer $S = u_2 + u_3 + \cdots + u_{27}$.

Correction

1. On sait que (u_n) est la suite géométrique telle que $u_0 = -5$ et de raison 3

   Alors $u_n = u_0 \times q^n$.

   On doit calculer $u_4 = u_0 \times q^4 = -6 \times 3^4 = -6 \times 3^2 \times 3^2 = -6 \times 9 \times 9 = -6 \times 81 = -486$

   Donc $\boxed{u_4 = -486}$
2. On sait que (u_n) la suite arithmétique telque $u_5 = 14$ et $u_25 = 26$

   Alors $u_n = u_p + (n-p) \times r$

   D'où $u_{25} = u_5 + (25-5) \times r \iff 26 = 14 + 20r \iff \dfrac{26-14}{20} = r \iff r = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5}$

   Donc $\boxed{\text{la raison est égale à } \dfrac{3}{5}}$
3. On sait que (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 3$.

   On doit calculer $S = u_2 + u_3 + \cdots + u_{27}$.

   Pour rappel, somme d'une suite arithmétique : $S = (\text{nombre de termes}) \times \dfrac{\text{1er terme+dernier}}{2}$

   Alors

   - le nombre de termes dans cette somme S est $27 - 2 + 1 = 26$
   - $u_2 = u_0 + 3r = 5 + 3 \times 2 = 5 + 6 = 11$
   - $u_{27} = u_0 + 27r = 5 + 3 \times 27 = 5 + 81 = 86$

   D'où : $S = 26 \times \dfrac{11+86}{2} = \dfrac{13 \times 97}{2} = 13 \times 97 = 10 \times 97 + 3 \times 97 = 970 + 291 = 1261$

   Donc $\boxed{S = 1261}$

Exercice 2. 8 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n+1}$

Les deux parties sont indépendantes et montrerons le même resultat.

Partie A : Raisonnement par récurrence

1. Calculer les valeurs de u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. Conjecturer l'expression de u_n
3. Démontrer, par récurrence, la conjecture faite à la question précédente.

Partie B : Utilisation d'une suite annexe

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et de raison 1.
2. En déduire l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n.

Correction

Partie A : Raisonnement par récurrence

1. On a $u_0 = 1$
   Puis $u_1 = \dfrac{u_0}{u_0+1} = \dfrac{1}{2}$
   $u_2 = \dfrac{u_1}{u_1+1} = \dfrac{1/2}{3/2} = \dfrac{1}{3}$
   $u_3 = \dfrac{u_2}{u_2+1} = \dfrac{1/3}{4/3} = \dfrac{1}{4}$
   $u_4 = \dfrac{u_3}{u_3+1} = \dfrac{1/4}{5/4} = \dfrac{1}{5}$
2. Les résultats précédents laissent présager que pour tout entier naturel n : $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.
3. On définit la propriété suivante : pour tout entier naturel n, P_n : $u_n = \dfrac{1}{n+1}$

   Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et $\dfrac{1}{0+1} = 1$

   D'où on obtient bien $u_0 = \dfrac{1}{0+1}$

   Donc la propriété P_0 est vraie

   Hérédité : soit un entier naturel k, on suppose que la propriété P_k est vraie (càd $u_k = \dfrac{1}{k+1}$) et montrons que la propriété P_{k+1} est également vraie (càd $u_{k+1} = \dfrac{1}{k+1+1}$)

   On sait que $u_k = \dfrac{1}{k+1}$ et $u_{k+1} = \dfrac{u_k}{u_k+1}$

   $$u_{k+1} = \frac{u_k}{u_k+1} = \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k+1}+1} = \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1+k+1}{k+1}} = \frac{1}{k+1} \times \frac{k+1}{k+2} = \frac{1}{k+2}$$

   Donc la propriété P_{k+1} est également vraie

Conclusion : La propriété étant initialisée au rang 0 et héréditaire, d'après le principe de récurrence,

$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n = \dfrac{1}{n+1}}$

Partie B : Utilisation d'une suite annexe Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

1. On doit montrer que la suite (v_n) est arithmétique, montrons que $v_{n+1} - v_n$ est constant.

   D'après l'énoncé, pour tout entier naturel n :

   $$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \\ &= \frac{1}{u_n/(u_n+1)} - \frac{1}{u_n} \\ &= \frac{u_n+1}{u_n} - \frac{1}{u_n} \\ &= \frac{u_n}{u_n} = 1 \end{aligned}$$

   Et son premier terme est $v_0 = \dfrac{1}{u_0} = 1$

   Donc $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est donc une suite arithmétique de raison } r = 1 \text{ et de premier terme } v_0 = 1}$

2. Comme la suite (v_n) est donc une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_0 = 1$

   Alors $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n : v_n = v_0 + nr = 1 + n}$

   De plus $v_n = \dfrac{1}{u_n} \quad \Longleftrightarrow \quad u_n = \dfrac{1}{v_n}$

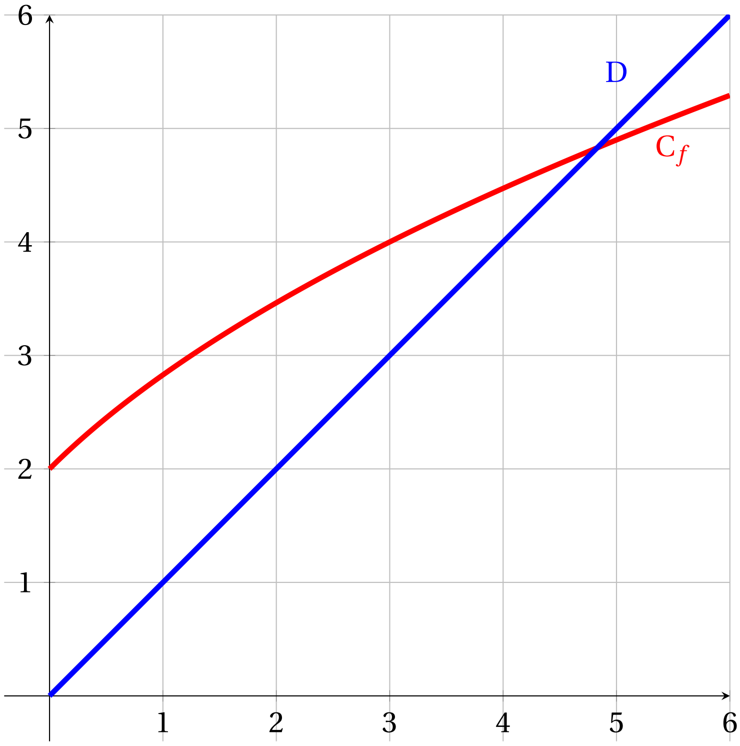
   Par conséquent, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n : u_n = \dfrac{1}{n+1}}$

Exercice 3. 8 points

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n + 1} \end{cases}$

Partie A

Sans les calculer, représenter ci-dessous les quatre premiers termes de cette suite sachant qu'on a déjà tracé la droite D d'équation $y = x$ et la courbe C_f représentant la fonction $f : x \longmapsto 2\sqrt{x+1}$.



Conjecturer le sens de variation de cette suite.

. . . .

Partie B

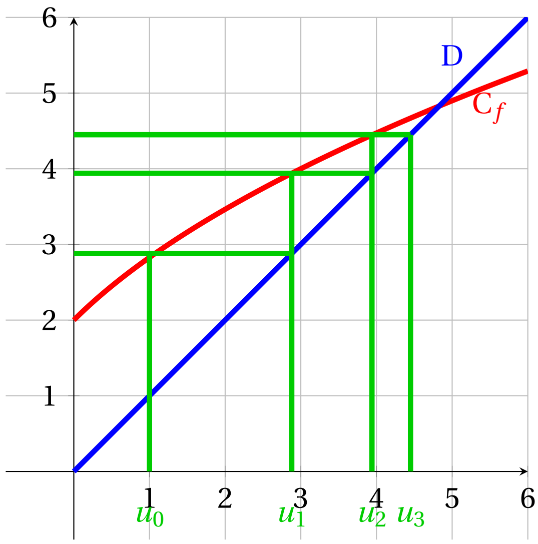
1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 5$.
   (Pour info : $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ *et* $2,44 < \sqrt{6} < 2,45$*)*
2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
3. La suite (u_n) est-elle convergente ?

Correction

On a la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n + 1}$.

Partie A

Sans les calculer, représenter ci-dessous les quatre premiers termes de cette suite sachant qu'on a déjà tracé la droite D d'équation $y = x$ et la courbe C_f représentant la fonction $f : x \longmapsto 2\sqrt{x+1}$.



Conjecturer le sens de variation de cette suite.

$\boxed{\text{La suite semble croissante}}$

Partie B

1. On définit la propriété suivante : pour tout entier naturel n, $\mathscr{P}_n$: $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 5$

   Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et $u_1 = 2\sqrt{u_0 + 1} = 2\sqrt{2} < 5$

   D'où on obtient bien $0 < u_0 < u_1 \leq 5$

   Donc la propriété P_0 est vraie

   Hérédité : soit un entier naturel k, on suppose que la propriété P_k est vraie (càd $0 \leq u_k < u_{k+1} \leq 5$) et montrons que la propriété P_{k+1} est également vraie (càd $0 \leq u_{k+1} < u_{k+2} \leq 5$)

   On sait que $0 \leq u_k < u_{k+1} \leq 5$

   $1 \leq u_k + 1 < u_{k+1} + 1 \leq 6$ puisque on ajoute 1

   $\sqrt{1} \leq \sqrt{u_k + 1} < \sqrt{u_{k+1} + 1} \leq \sqrt{6}$ puisque la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

   $2 \leq 2\sqrt{u_k + 1} < 2\sqrt{u_{k+1} + 1} \leq 2\sqrt{6}$ puisque on multiplie par 5

   or $2\sqrt{6} < 2 \times 2,45 = 4,9 < 5$

   $0 < 2 \leq 2\sqrt{u_k + 1} < 2\sqrt{u_{k+1} + 1} \leq 2\sqrt{6} < 5$

   Donc la propriété P_{k+1} est également vraie

   Conclusion : La propriété étant initialisée au rang 0 et héréditaire, d'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 5}$

2. Comme on vient de prouver que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 5$

   On peut donc en déduire que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante}}$

3. On sait que la suite suite (u_n) est croissante et majrée par 5 puisque pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 5$

   d'après le théorème de convergence, on peut dire que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est convergente}}$