

Nom et prénom :

Exercice 1.

1. On considère la suite arithmétique
- (u_n)
- de raison 2 et de premier terme
- $u_1 = 0,01$
- .

Calculer u_{20} et $S_{20} = u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$.On sait que (u_n) est une suite arithmétique avec $r=2$ et $u_1=0,01$ Alors $u_{20} = u_1 + (20-1) \cdot r = 0,01 + 19 \times 2 = 38,01$ $u_{20} = 38,01$ Et $S_{20} = u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$
= nb. de termes $\times$ $\frac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}$ = $20 \times \frac{u_1 + u_{20}}{2} = 20 \times \frac{0,01 + 38,01}{2} = 380,1$ $S_{20} = 380,1$

2. On considère la suite géométrique
- (v_n)
- de raison 3 et de premier terme
- $v_0 = 2$
- .

Calculer v_{10} et $S_{10} = v_0 + v_1 + \dots + v_{10}$.On sait que (v_n) est une suite géométrique avec $q=3$ et $v_0=2$ Alors $v_{10} = v_0 \times q^{10} = 2 \times 3^{10} = 118\,098$ $v_{10} = 118\,098$ Et $S_{10} = v_0 + v_1 + \dots + v_{10}$
= $1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{11}}{1 - q} = v_0 \times \frac{1 - q^{11}}{1 - q} = 2 \times \frac{1 - 3^{11}}{1 - 3} = 177\,146$ $S_{10} = 177\,146$ **Exercice 2.**On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$.

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite et conjecturer l'expression de
- u_n
- en fonction de
- n
- .

On a $u_0 = 0$
 $u_1 = \sqrt{1 + u_0^2} = \sqrt{1 + 0^2} = \sqrt{1}$
 $u_2 = \sqrt{1 + u_1^2} = \sqrt{1 + 1^2} = \sqrt{2}$
 $u_3 = \sqrt{1 + u_2^2} = \sqrt{1 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3}$
 $u_4 = \sqrt{1 + u_3^2} = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4}$

2. Démontrer cette conjecture par récurrence.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$ la propriété $P_n : u_n = \sqrt{n}$ • Initialisation On a $u_0 = 0$ et $\sqrt{0} = 0$ donc $u_0 = \sqrt{0}$
la propriété P_0 est vraie.• Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que P_n est vraie (c'est $u_n = \sqrt{n}$)
et montrons que P_{n+1} est vraie (c'est $u_{n+1} = \sqrt{n+1}$)On a $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$ et $u_n = \sqrt{n}$
 $= \sqrt{1 + (\sqrt{n})^2}$
 $= \sqrt{1 + n}$
 $= \sqrt{n+1}$ Conclusion : Par initialisation
à rang 0 et par hérédité, d'après le principe
de récurrence on a $u_n = \sqrt{n}$