



Nom et prénom :

Exercice 1.

1. On considère la suite arithmétique (u_n) de raison 2 et de premier terme $u_1 = 0,01$.

Calculer u_{20} et $S_{20} = u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$.

2. On considère la suite géométrique (v_n) de raison 3 et de premier terme $v_0 = 2$.

Calculer v_{10} et $S_{10} = v_0 + v_1 + \dots + v_{10}$.

Correction

1. On sait que la suite (u_n) est arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_1 = 0,01$.

Alors pour $n \geq 1$ $u_{n+1} = u_n + 2$

pour $n \geq 1$ $u_n = u_1 + 2(n-1) = 0,01 + 2(n-1)$

Alors $u_{20} = 0,01 + 2 \times (20-1) = 0,01 + 2 \times 19 = 38,01$

Et $S_{20} = u_1 + u_2 + \dots + u_{20} = (\text{nombre de terme}) \times \frac{\text{1er terme} + \text{dernier}}{2}$

$$S_{20} = 20 \times \frac{0,01 + 38,01}{2} = 380,2$$

Donc $u_{20} = 38,01$ et $S_{20} = 380,2$

2. On sait que la suite (v_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = 2$.

Alors pour $n \geq 0$ $v_{n+1} = v_n \times 3$

pour $n \geq 0$ $v_n = v_0 \times 3^n = 2 \times 3^n$

Alors $v_{10} = 2 \times 3^{10} = 118\,098$

Et $S_{10} = v_0 + v_1 + \dots + v_{10} = \text{1er terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{nb \text{ determe}}}{1 - \text{raison}} = 2 \times \frac{1 - 3^{10+1}}{1 - 3} = 3^{11} - 1 = 177\,146$

Donc $v_{10} = 118\,098$ et $S_{10} = 177\,146$

**Exercice 2.**

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$.

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite et conjecturer l'expression de u_n en fonction de n .
2. Démontrer cette conjecture par récurrence.

Correction

1. On a $u_0 = 0$

$$\text{Alors } u_1 = \sqrt{1 + u_0^2} = \sqrt{1 + 0^2} = 1$$

$$u_2 = \sqrt{1 + u_1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$u_3 = \sqrt{1 + u_2^2} = \sqrt{1 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3}$$

$$u_4 = \sqrt{1 + u_3^2} = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4}$$

On peut émettre la conjecture pour tout entier naturel n , $u_n = \sqrt{n}$

2. On définit la propriété suivante : pour tout entier naturel n , $P_n : u_n = \sqrt{n}$

Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = 0 = \sqrt{0}$ donc la propriété P_0 est vraie

Hérédité : soit un entier naturel k , on suppose que la propriété P_k est vraie (càd $u_k = \sqrt{k}$) et montrons que la propriété P_{k+1} est également vraie (càd $u_{k+1} = \sqrt{k+1}$)

$$\text{On sait que } u_{k+1} = \sqrt{1 + u_k^2}$$

$$\text{Or } u_k = \sqrt{k}$$

$$\text{Alors } u_{k+1} = \sqrt{1 + (\sqrt{k})^2} = \sqrt{1 + k}$$

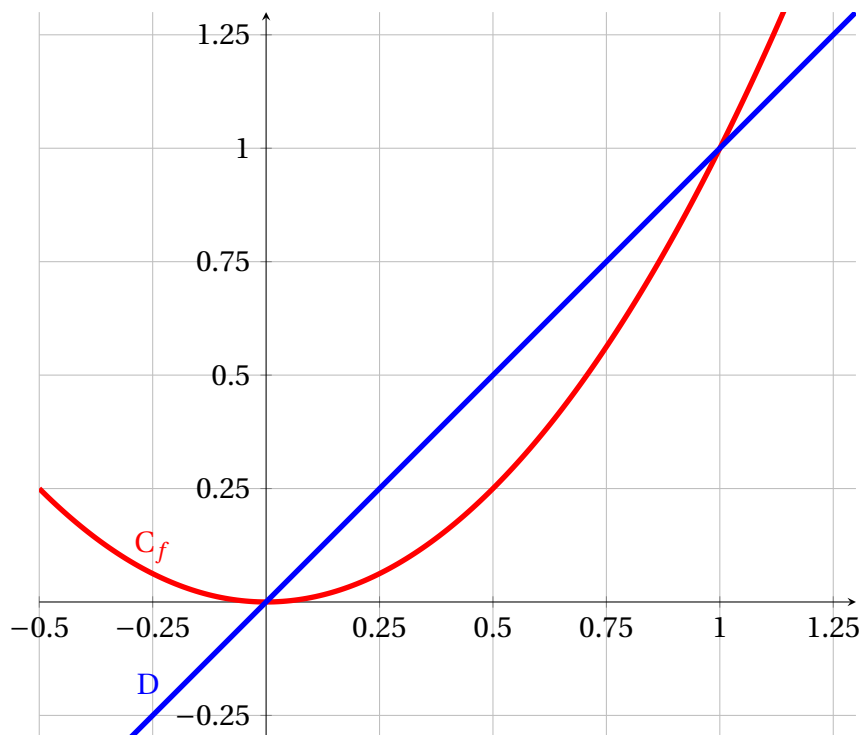
Donc la propriété P_{k+1} est également vraie

Conclusion : La propriété étant initialisée au rang 0 et héréditaire, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $u_n = \sqrt{n}$

**Exercice 3.**

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0,75$ et $u_{n+1} = u_n^2$.

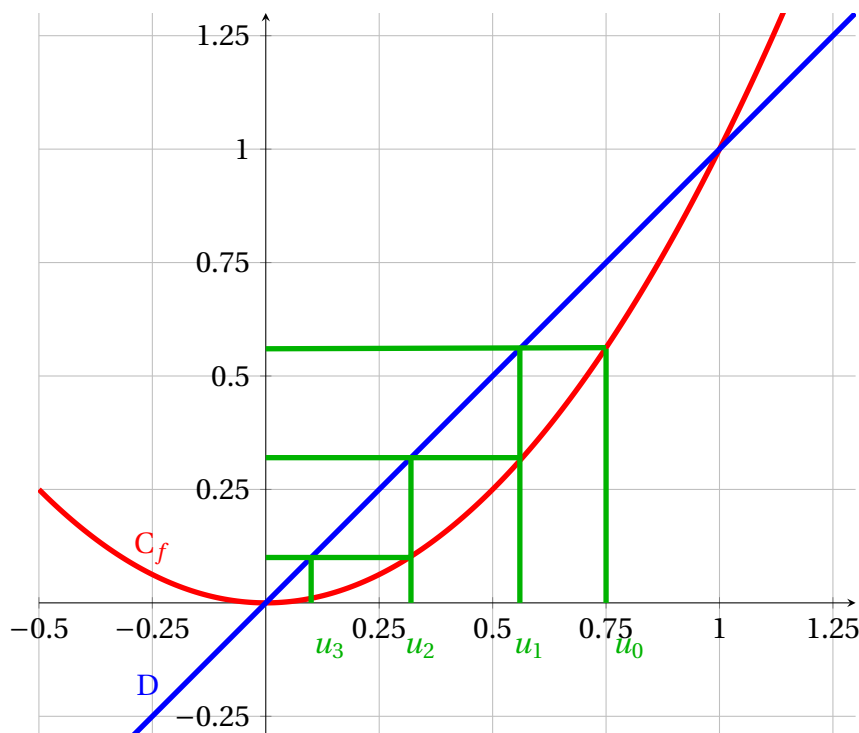
1. Sans les calculer, représenter ci-dessous les quatre premiers termes de cette suite sachant qu'on a déjà tracé la droite D d'équation $y = x$ et la courbe C_f représentant la fonction $f : x \mapsto x^2$.



2. Conjecturer le sens de variation de cette suite.
3. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 < u_{n+1} < u_n < 1$
- (b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n)
- (c) La suite (u_n) est-elle convergente?

Correction

1.



2. la suite (u_n) semble décroissante

3. (a) On définit la propriété suivante : pour tout entier naturel n , $P_n : 0 < u_{n+1} < u_n < 1$

Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = \frac{3}{4}$ et $u_1 = u_0^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

D'où on obtient bien $0 < u_1 < u_0 < 1$

Donc la propriété P_0 est vraie

Hérédité : soit un entier naturel k , on suppose que la propriété P_k est vraie (càd $0 < u_{k+1} < u_k < 1$) et montrons que la propriété P_{k+1} est également vraie (càd $0 < u_{k+2} < u_{k+1} < u_k < 1$)

On sait que $0 < u_{k+1} < u_k < 1$

$$-2 + 2 < u_k + 2 < u_{k+1} + 2$$

$$0^2 < (u_{k+1})^2 < (u_k)^2 < 1^2 \quad \text{puisque la fonction carrée est strictement}$$

croissante sur $[0; +\infty[$

$$0 < u_{k+2} < u_{k+1} \quad \text{puisque } u_{n+1} = u_n^2$$

Donc la propriété P_{k+1} est également vraie

Conclusion : La propriété étant initialisée au rang 0 et héréditaire, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $0 < u_{n+1} < u_n < 1$

(b) Comme on vient de prouver que pour tout entier naturel n , $0 < u_{n+1} < u_n < 1$

On peut donc en déduire que la suite (u_n) est décroissante et bornée sur $[0; 1]$

(c) On sait que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0

d'après le théorème de convergence, on peut dire que la suite (u_n) est convergente