Nom et prénom : ....

Exercice 1.

1. On considère la suite arithmétique (u_n) de raison 2 et de premier terme $u_1 = 0,01$.

   Calculer u_{20} et $S_{20} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}$.

2. On considère la suite géométrique (v_n) de raison 3 et de premier terme $v_0 = 2$.

   Calculer v_{10} et $S_{10} = v_0 + v_1 + \cdots + v_{10}$.

> *Correction*
>
> 1. On sait que la suite (u_n) est arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_1 = 0,01$.
>
>   Alors pour $n \geq 1$ $u_{n+1} = u_n + 2$
>
>   pour $n \geq 1$ $u_n = u_1 + 2\,(n-1) = 0,01 + 2(n-1)$
>
>   Alors $u_{20} = 0,01 + 2 \times (20-1) = 0,01 + 2 \times 19 = 38,01$
>
>   Et $S_{20} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{20} = (nombre\ de\ terme) \times \dfrac{1er\ terme + dernier}{2}$
>
> $S_{20} = 20 \times \dfrac{0,01 + 38,01}{2} = 380,2$
>
>   Donc $\boxed{u_{20} = 38,01 \text{ et } S_{20} = 380,2}$
>
> 2. On sait que la suite (v_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = 2$.
>
>   Alors pour $n \geq 0$ $v_{n+1} = v_n \times 3$
>
>   pour $n \geq 0$ $v_n = v_0 \times 3^n = 2 \times 3^n$
>
>   Alors $v_{10} = 2 \times 3^{10} = 118\,098$
>
>   Et $S_{10} = v_0 + v_1 + \cdots + v_{10} = 1er\ terme \times \dfrac{1 - raison^{nb\ determe}}{1 - raison} = 2 \times \dfrac{1 - 3^{10+1}}{1-3} = 3^{11} - 1 = 177\,146$
>
>   Donc $\boxed{v_{10} = 118\,098 \text{ et } S_{10} = 177\,146}$

Exercice 2.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$.

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite et conjecturer l'expression de u_n en fonction de n.
2. Démontrer cette conjecture par récurrence.

Correction

1. On a $u_0 = 0$

   Alors $u_1 = \sqrt{1 + u_0^2} = \sqrt{1 + 0^2} = 1$

   $u_2 = \sqrt{1 + u_1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

   $u_3 = \sqrt{1 + u_2^2} = \sqrt{1 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3}$

   $u_4 = \sqrt{1 + u_3^2} = \sqrt{1 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4}$

   On peut émettre la conjecture pour tout entier naturel n, $u_n = \sqrt{n}$

2. On définit la propriété suivante : pour tout entier naturel n, P_n : $u_n = \sqrt{n}$

   Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = 0 = \sqrt{0}$ donc la propriété P_0 est vraie

   Hérédité : soit un entier naturel k, on suppose que la propriété P_k est vraie (càd $u_k = \sqrt{k}$) et montrons que la propriété P_{k+1} est également vraie (càd $u_{k+1} = \sqrt{k+1}$)

   On sait que $u_{k+1} = \sqrt{1 + u_k^2}$

   Or $u_k = \sqrt{k}$

   Alors $u_{k+1} = \sqrt{1 + \left(\sqrt{k}\right)^2} = \sqrt{1 + k}$

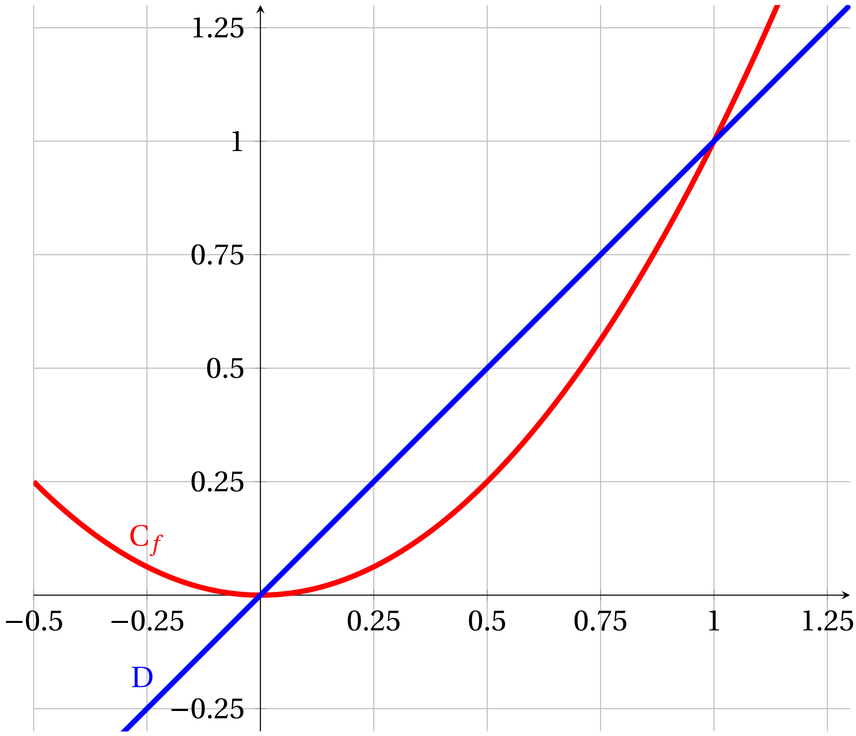
   Donc la propriété P_{k+1} est également vraie

   Conclusion : La propriété étant initialisée au rang 0 et héréditaire, d'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n = \sqrt{n}}$

Exercice 3.

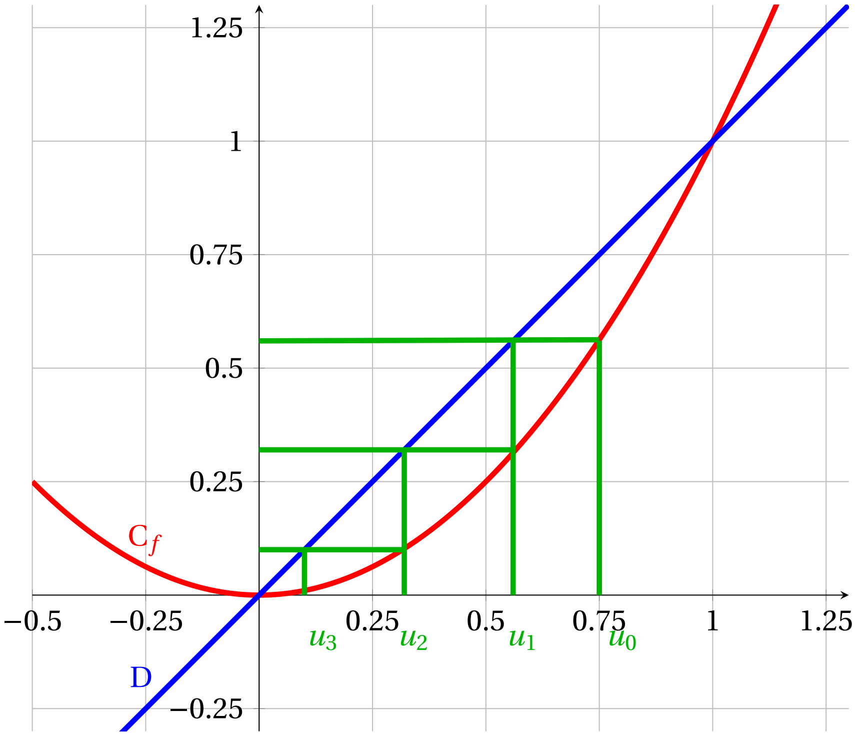
On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = \frac{3}{4}$ et $u_{n+1} = u_n^2$.

1. Sans les calculer, représenter ci-dessous les quatre premiers termes de cette suite sachant qu'on a déjà tracé la droite D d'équation $y = x$ et la courbe C_f représentant la fonction $f : x \longmapsto x^2$.



2. Conjecturer le sens de variation de cette suite.
3. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_{n+1} < u_n < 1$
   (b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n)
   (c) La suite (u_n) est-elle convergente ?

> *Correction*
>
> 1.



2. la suite (u_n) semble décroissante

3. (a) On définit la propriété suivante : pour tout entier naturel n, $P_n : 0 < u_{n+1} < u_n < 1$

   <u>Initialisation :</u> pour $n = 0$, on a $u_0 = \dfrac{3}{4}$ et $u_1 = u_0^2 = \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{9}{16}$

   D'où on obtient bien $0 < u_1 < u_0 < 1$

   Donc la propriété P_0 est vraie

   <u>Hérédité :</u> soit un entier naturel k, on suppose que la propriété P_k est vraie (càd $0 < u_{k+1} < u_k < 1$) et montrons que la propriété P_{k+1} est également vraie (càd $0 < u_{k+1} < u_k < 1$)

   On sait que $0 < u_{k+1} < u_k < 1$

   $-2 + 2 < u_k + 2 < u_{k+1} + 2$

   $0^2 < (u_{k+1})^2 < (u_n)^2 < 1^2$ puisque la fonction carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

   $0 < u_{k+2} < u_{k+1}$ puisque $u_{n+1} = u_n^2$

   Donc la propriété P_{k+1} est également vraie

   <u>Conclusion :</u> La propriété étant initialisée au rang 0 et héréditaire, d'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 0 < u_{n+1} < u_n < 1}$

   (b) Comme on vient de prouver que pour tout entier naturel n, $0 < u_{n+1} < u_n < 1$

   On peut donc en déduire que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante et bornée sur } [0; 1]}$

   (c) On sait que la suite suite (u_n) est décroissante et minorée par 0

   d'après le théorème de convergence, on peut dire que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est convergente}}$