



Nom et prénom :

Exercice 1.

4 points

1. (u_n) est la suite géométrique telle que $u_0 = -8$ et de raison 3. Calculer u_4 .
2. Soit (u_n) la suite arithmétique telle que $u_{10} = 14$ et $u_{25} = 26$. Déterminer la raison de la suite (u_n) .
3. (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 3$.
Calculer $S = u_2 + u_3 + \dots + u_{25}$.

Correction

1. On sait que (u_n) est la suite géométrique telle que $u_0 = -8$ et de raison 3

Alors $u_n = u_0 \times q^n$.

On doit calculer $u_4 = u_0 \times q^4 = -8 \times 3^4 = -8 \times 3^2 \times 3^2 = -8 \times 9 \times 9 = -8 \times 81 = -648$

Donc $u_4 = -648$

2. On sait que (u_n) la suite arithmétique telle que $u_{10} = 14$ et $u_{25} = 26$

Alors $u_n = u_p + (n - p) \times r$

D'où $u_{25} = u_{10} + (25 - 10) \times r \iff 26 = 14 + 15r \iff \frac{26 - 14}{15} = r \iff r = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

Donc la raison est égale à $\frac{4}{5}$

3. On sait que (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 3$.

On doit calculer $S = u_2 + u_3 + \dots + u_{25}$.

Pour rappel, somme d'une suite arithmétique : $S = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{1er terme} + \text{dernier}}{2}$

Alors

▪ le nombre de termes dans cette somme S est $25 - 2 + 1 = 24$

▪ $u_2 = u_0 + 3r = 5 + 3 \times 2 = 5 + 3 = 8$

▪ $u_{25} = u_0 + 24r = 5 + 3 \times 25 = 5 + 75 = 80$

D'où : $S = 24 \times \frac{8 + 80}{2} = \frac{24 \times 88}{2} = 12 \times 88 = 10 \times 88 + 2 \times 88 = 880 + 176 = 1056$

Donc $S = 1056$

**Exercice 2.**

4 points

On considère les suites (u_n) définie par $u_0 = 14$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - 5$

Et (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_n = u_n - 5$.

1. Montrer que la suite (t_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et de raison 2.
2. En déduire l'expression de t_n puis celle de u_n en fonction de n .

Correction

On a la suite (u_n) définie par $u_0 = 14$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - 5$

Et la suite (t_n) telle que pour tout entier naturel n , on pose $t_n = u_n - 5$.

1. On doit montrer que la suite (t_n) est arithmétique, montrons que $t_{n+1} = qt_n$ avec q un nombre réel.

D'après l'énoncé, pour tout entier naturel n :

$$t_{n+1} = u_{n+1} - 5 = 2u_n - 5 - 5 = 2u_n - 10 = 2(u_n - 5) = 2t_n$$

Et son premier terme est $t_0 = u_0 - 5 = 14 - 5 = 9$

Donc la suite (t_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $t_0 = 9$

2. la suite (t_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $t_0 = 9$

Alors pour tout entier naturel n : $t_n = t_0 \times q^n = 9 \times 2^n$

De plus $t_n = u_n - 5 \iff u_n = t_n + 5$

Par conséquent, pour tout entier naturel n : $u_n = 9 \times 2^n + 5$

**Exercice 3.**

8 points

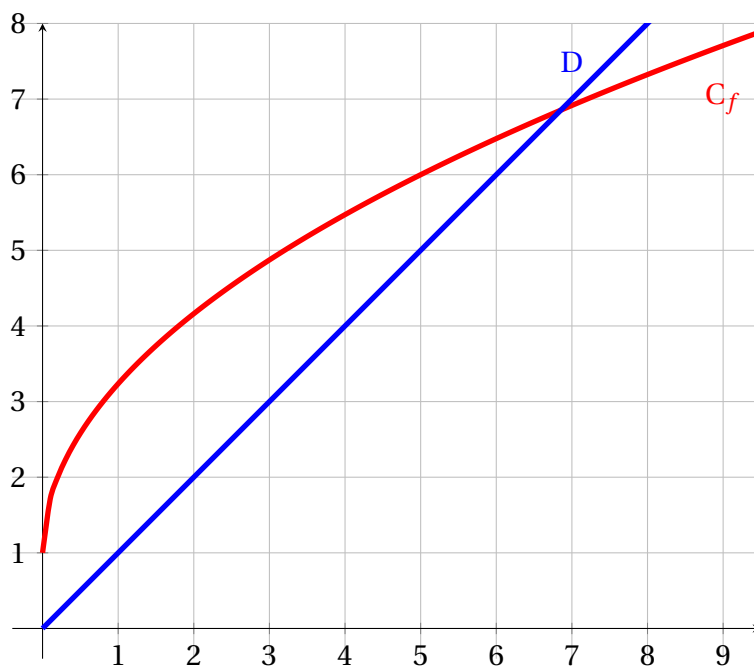
Soit (u_n) la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{5u_n} + 1 \end{cases}$$

Partie A

Sans les calculer, représenter ci-dessous les quatre premiers termes de cette suite sachant qu'on a déjà tracé la droite D d'équation $y = x$ et la courbe C_f représentant la fonction $f : x \mapsto \sqrt{5x} + 1$.

Conjecturer le sens de variation de cette suite.

.....

Partie B

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 10$. (Rappel : $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$)
2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
3. La suite (u_n) est-elle convergente ?

Correction

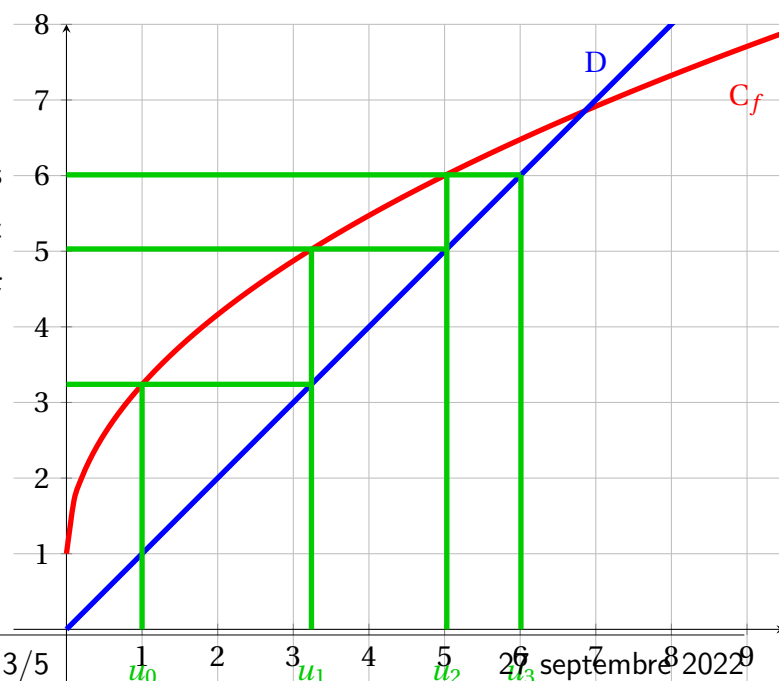
On a la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{5u_n} + 1$.

Partie A

Sans les calculer, représenter ci-dessous les quatre premiers termes de cette suite sachant qu'on a déjà tracé la droite D d'équation $y = x$ et la courbe C_f représentant la fonction $f : x \mapsto \sqrt{5x} + 1$.

Conjecturer le sens de variation de cette suite.

la suite (u_n) semble être croissante





Partie B

1. On définit la propriété suivante : pour tout entier naturel n , $\mathcal{P}_n : 0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 10$

Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{5u_0} + 1 = \sqrt{5} + 1 > 1$

D'où on obtient bien $0 < u_0 < u_1 \leq 10$

Donc la propriété P_0 est vraie

Hérédité : soit un entier naturel k , on suppose que la propriété P_k est vraie (càd $0 \leq u_k < u_{k+1} \leq 10$) et montrons que la propriété P_{k+1} est également vraie (càd $0 \leq u_{k+1} < u_{k+2} \leq 10$)

On sait que $0 \leq u_k < u_{k+1} \leq 10$

$$0 \leq 5u_k < 5u_{k+1} \leq 50 \quad \text{puisque on multiplie par 5}$$

$0 \leq \sqrt{5u_k} < \sqrt{5u_{k+1}} \leq \sqrt{50}$ puisque la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

$$1 \leq \sqrt{5u_k} + 1 < \sqrt{5u_{k+1}} + 1 \leq 5\sqrt{2} + 1 \quad \text{puisque on ajoute 1}$$

$$\text{or } 5\sqrt{2} + 1 < 5 \times 1,5 + 1 = 7,5 + 1 = 8,5 < 10$$

$$0 < 1 \leq \sqrt{5u_k} + 1 < \sqrt{5u_{k+1}} + 1 \leq 5\sqrt{2} + 1 < 10$$

Donc la propriété P_{k+1} est également vraie

Conclusion : La propriété étant initialisée au rang 0 et héréditaire, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 10$

2. Comme on vient de prouver que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 10$

On peut donc en déduire que la suite (u_n) est croissante

3. On sait que la suite (u_n) est croissante et majorée par 10 puisque pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 10$

d'après le théorème de convergence, on peut dire que la suite (u_n) est convergente

**Exercice 4.**

4 points

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$.

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n = n^2 + n$.

Correction

1. On a $u_0 = 0$

$$\text{Alors } u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 2 = 2$$

$$u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 2 = 2 + 4 = 6$$

$$u_3 = u_2 + 2 \times 2 + 2 = 6 + 6 = 12$$

$$u_4 = u_3 + 2 \times 3 + 2 = 12 + 8 = 20$$

2. On définit la propriété suivante : pour tout entier naturel n , $P_n : u_n = n^2 + n$

Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = 0$ et $0^2 + 0 = 0$ donc la propriété P_0 est vraie

Hérédité : soit un entier naturel k , on suppose que la propriété P_k est vraie (càd $u_k = k^2 + k$) et montrons que la propriété P_{k+1} est également vraie (càd $u_{k+1} = (k+1)^2 + k+1$)

$$\text{On sait que } u_{k+1} = u_k + 2k + 2 \quad \text{et} \quad u_k = k^2 + k$$

$$\text{Alors } u_{k+1} = k^2 + k + 2k + 2 = k^2 + 3k + 2$$

$$\text{Or } (k+1)^2 + k+1 = k^2 + 2k + 1 + k + 1 = k^2 + 3k + 2$$

$$\text{D'où } u_{k+1} = (k+1)^2 + k+1$$

Donc la propriété P_{k+1} est également vraie

Conclusion : La propriété étant initialisée au rang 0 et héréditaire, d'après le principe de récurrence,

pour tout entier naturel n , $u_n = n^2 + n$