

Nom et prénom :

Exercice 1.

1. On considère la suite arithmétique
- (u_n)
- de raison 3 et de premier terme
- $u_0 = 2$
- .

Calculer u_{10} et $S_{10} = u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$.On sait que (u_n) est une suite arithmétique avec $r = 3$ et $u_0 = 2$

D'où $u_{10} = u_0 + 10 \times r = 2 + 10 \times 3 = 32$ $u_{10} = 32$

Et $S_{10} = u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$
 $= \text{nb. termes} \times \frac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier}}{2} = 11 \times \frac{u_0 + u_{10}}{2} = 11 \times \frac{2 + 32}{2} = 187$ $S_{10} = 187$

2. On considère la suite géométrique
- (v_n)
- de raison 2 et de premier terme
- $v_1 = 0,01$
- .

Calculer v_{20} et $S_{20} = v_1 + v_2 + \dots + v_{20}$.On sait que (v_n) est une suite géométrique avec $q = 2$ et $v_1 = 0,01$

D'où $v_{20} = v_1 \times q^{20-1} = 0,01 \times 2^{19} = 5\,242,88$ $v_{20} = 5\,242,88$

Et $S_{20} = v_1 + v_2 + \dots + v_{20}$
 $= 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nb. termes}}}{1 - q} = v_1 \times \frac{1 - 2^{20}}{1 - 2} = 0,01 \times 1\,048\,575 = 10\,485,75$ $S_{20} = 10\,485,75$

Exercice 2.On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$.

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite.

On a $u_0 = 3$

$u_1 = 2 \times u_0 - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$

$u_2 = 2 \times u_1 - 1 = 2 \times 5 - 1 = 9$

$u_3 = 2 \times u_2 - 1 = 2 \times 9 - 1 = 17$

$u_4 = 2 \times u_3 - 1 = 2 \times 17 - 1 = 33$

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel
- n
- ,
- $u_n = 2^{n+1} + 1$
- .

On prouve par tout n entier la propriété $P_n : u_n = 2^{n+1} + 1$

- Initialisation On a $u_0 = 3$ et $2^1 + 1 = 3$ d'où $u_0 = 2^1 + 1$
 Donc P_0 est vraie

- Hérédité Soit $m \in \mathbb{N}$, on suppose vraie P_m (c'est $u_m = 2^{m+1} + 1$)
 et montrons que P_{m+1} est vraie (c'est $u_{m+1} = 2^{m+2} + 1$)
 On sait que $u_m = 2^{m+1} + 1$ et $u_{m+1} = 2u_m - 1$
 Alors $u_{m+1} = 2 \times (2^{m+1} + 1) - 1 = 2^{m+2} + 2 - 1 = 2^{m+2} + 1$
 D'où P_{m+1} est vraie.

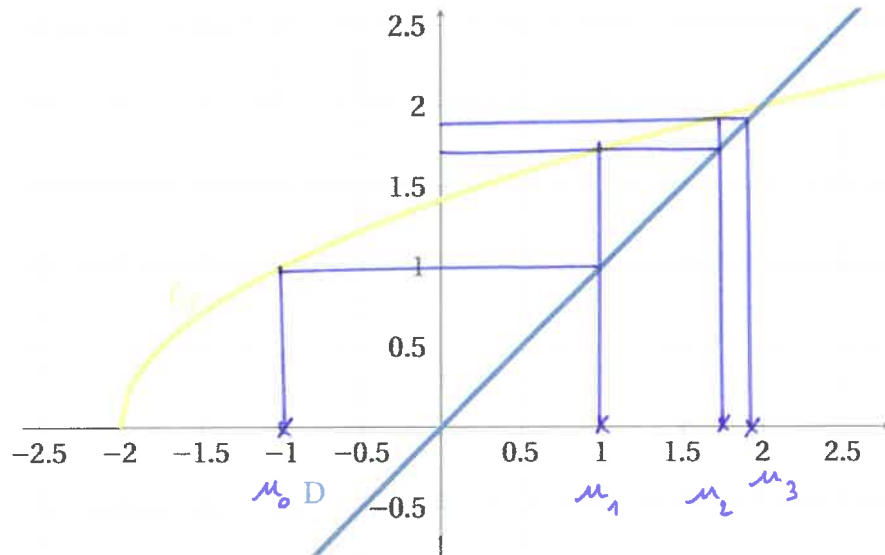
- Conclusion Par initialisation au rang 0 et par hérédité, on applique le principe de récurrence et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^{n+1} + 1$



Exercice 3.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

- Sans les calculer, représenter ci-dessous les quatre premiers termes de cette suite sachant qu'on a déjà tracé la droite D d'équation $y = x$ et la courbe C_f représentant la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2 + x}$.



- Conjecturer le sens de variation de cette suite. ... la suite (u_n) semble croissante ...
- (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $-2 < u_n < u_{n+1} < 2$.

Conclusion : par initialisation et par récurrence, on applique le principe de récurrence. Alors, d'où $n \in \mathbb{N}$, $-2 < u_n < u_{n+1} < 2$.

On part par l'entier n vérifiant la propriété P_n : $-2 < u_n < u_{n+1} < 2$

Initialisation : on a $u_0 = -1$ et $u_1 = \sqrt{2 + u_0} = \sqrt{2 - 1} = \sqrt{1} = 1$
d'où $-2 < u_0 < u_1 < 2$: P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}$, on suppose que P_m est vraie (c'est $-2 < u_m < u_{m+1} < 2$)
et montrons que P_{m+1} est vraie (c'est $-2 < u_{m+1} < u_{m+2} < 2$)

On a $-2 < u_m < u_{m+1} < 2$
 $2 - 2 < 2 + u_m < 2 + u_{m+1} < 2 + 2$
 $\sqrt{0} < \sqrt{2 + u_m} < \sqrt{2 + u_{m+1}} < \sqrt{4}$ car la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$
 $-2 < u_{m+1} < u_{m+2} < 2$ donc P_{m+1} est vraie

- En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

On vient de prouver que $-2 < u_n < u_{n+1} < 2$

Donc la suite (u_n) est croissante.

- La suite (u_n) est-elle convergente?

Comme la suite (u_n) est croissante et majorée par 2.

D'après le théorème de convergence

On en déduit que la suite (u_n) est convergente