Nom et prénom : ....

Exercice 1.

1. On considère la suite arithmétique (u_n) de raison 3 et de premier terme $u_0 = 2$.

   Calculer u_{10} et $S_{10} = u_0 + u_1 + \cdots + u_{20}$.

2. On considère la suite géométrique (v_n) de raison 2 et de premier terme $v_1 = 0,01$.

   Calculer v_{20} et $S_{20} = v_1 + v_2 + \cdots + v_{20}$.

Correction

1. On sait que la suite (u_n) est arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 2$.

   Alors pour $n \geq 0$ $u_{n+1} = u_n + 3$

   pour $n \geq 0$ $u_n = u_0 + 3n = 2 + 3n$

   Alors $u_{10} = 2 + 3 \times 10 = 32$

   Et $S_{10} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{10} = (nombre\ de\ terme) \times \dfrac{1er\ terme + dernier\ terme}{2}$

   $S_{10} = 11 \times \dfrac{2+32}{2} = 11 \times 17 = 187$

   Donc $\boxed{u_{10} = 32 \text{ et } S_{10} = 187}$

2. On sait que la suite (v_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_1 = 0,01$.

   Alors pour $n \geq 1$ $v_{n+1} = v_n \times 2$

   pour $n \geq 1$ $v_n = v_1 \times 2^{(n-1)} = 0,01 \times 2^{n-1}$

   Alors $v_{20} = 0,01 \times 2^{20-1} = 0,01 \times 2^{19} = 5242,88$

   Et $S_{20} = v_1 + v_2 + \cdots + v_{20} = 1er\ terme \times \dfrac{1 - raison^{nb\ de\ terme}}{1 - raison} = 0,01 \times \dfrac{1-2^{20}}{1-2} = 10\,485,75$

   Donc $\boxed{v_{20} = 5242,88 \text{ et } S_{20} = 10485,75}$

Exercice 2.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2\ u_n - 1$.

1. Déterminer les 5 premiers termes de la suite.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 2^{n+1} + 1$.

Correction

1. On a $u_0 = 3$

   Alors $u_1 = 2\ u_0 - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$

   $u_2 = 2\ u_1 - 1 = 2 \times 5 - 1 = 9$

   $u_3 = 2\ u_2 - 1 = 2 \times 9 - 1 = 17$

   $u_4 = 2\ u_3 - 1 = 2 \times 17 - 1 = 33$

2. On définit la propriété suivante : pour tout entier naturel n, P_n : $u_n = 2^{n+1} + 1$

   Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = 3$ et $2^{0+1} + 1 = 2 + 1 = 3$ donc la propriété P_0 est vraie

   Hérédité : soit un entier naturel k, on suppose que la propriété P_k est vraie (càd $u_k = 2^{k+1} + 1$) et montrons que la propriété P_{k+1} est également vraie (càd $u_{k+1} = 2^{k+2} + 1$)

   On sait que $u_{k+1} = 2\ u_k - 1$

   Or $u_k = 2^{k+1} + 1$

   Alors $u_{k+1} = 2 \times \left(2^{k+1} + 1\right) - 1 = 2 \times 2^{k+1} + 2 - 1 = 2^{k+2} + 1$

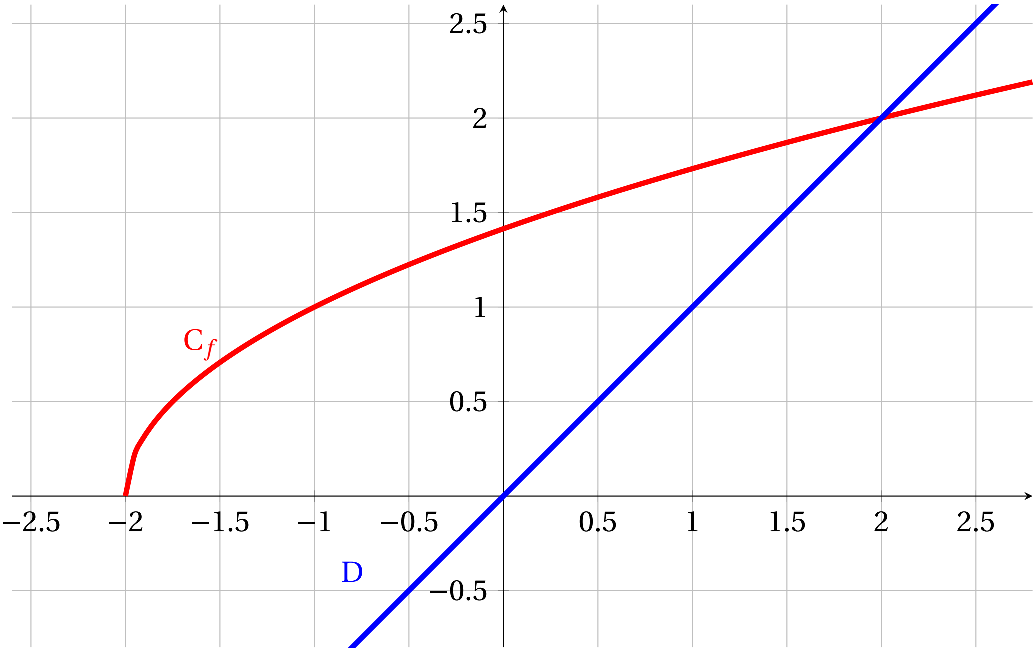
   Donc la propriété P_{k+1} est également vraie

   Conclusion : La propriété étant initialisée au rang 0 et héréditaire, d'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n = 2^{n+1} + 1}$

Exercice 3.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

1. Sans les calculer, représenter ci-dessous les quatre premiers termes de cette suite sachant qu'on a déjà tracé la droite D d'équation $y = x$ et la courbe C_f représentant la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{2+x}$.



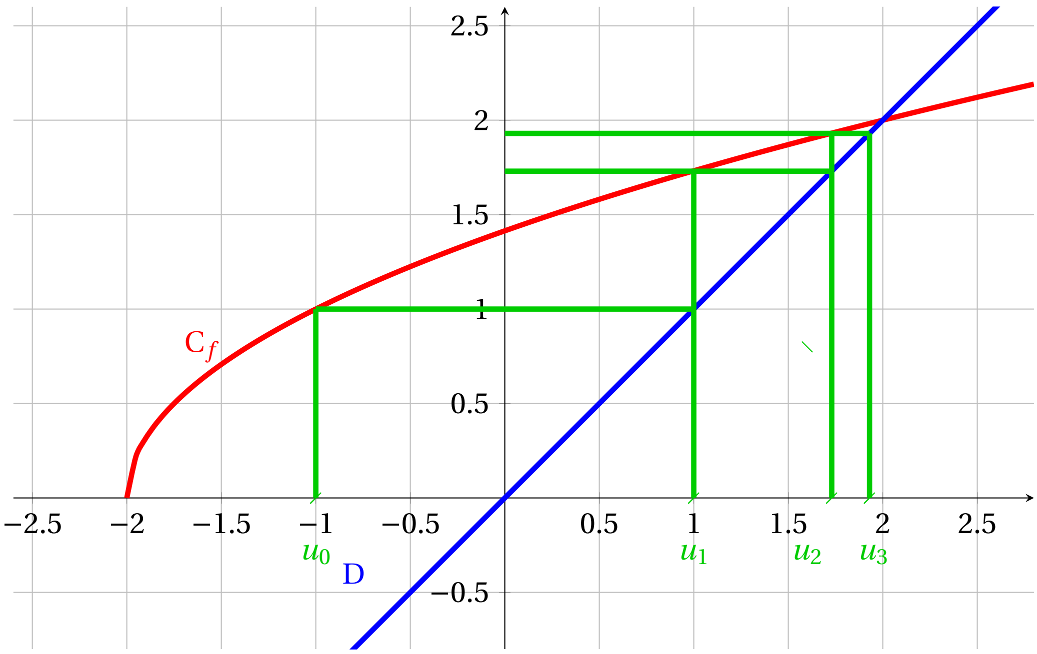
2. Conjecturer le sens de variation de cette suite.
3. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $-2 < u_n < u_{n+1} < 2$

   (b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n)

   (c) La suite (u_n) est-elle convergente ?

Correction

1.



2. la suite (u_n) semble croissante

3. (a) On définit la propriété suivante : pour tout entier naturel n, $\mathrm{P}_n : -2 < u_n < u_{n+1} < 2$

<u>Initialisation :</u> pour $n = 0$, on a $u_0 = -1$ et $u_1 = \sqrt{2+u_0} = \sqrt{2-1} = 1$

D'où on obtient bien $-2 < u_0 < u_1 < 2$

Donc la propriété P_0 est vraie

<u>Hérédité :</u> soit un entier naturel k, on suppose que la propriété P_k est vraie (càd $-2 < u_k < u_{k+1}$) et montrons que la propriété P_{k+1} est également vraie (càd $-2 < u_{k+1} < u_{k+2}$)

On sait que $-2 < u_k < u_{k+1} < 2$

$-2+2 < u_k + 2 < u_{k+1} + 2 < 2+2$

$\sqrt{0} < \sqrt{u_k+2} < \sqrt{u_{k+1}+2} < \sqrt{4}$ puisque la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

$-2 < 0 < u_{k+1} < u_{k+2} < 2$ puisque $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$

Donc la propriété P_{k+1} est également vraie

<u>Conclusion :</u> La propriété étant initialisée au rang 0 et héréditaire, d'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ -2 < u_n < u_{n+1} < 2}$

(b) Comme on vient de prouver que pour tout entier naturel n, $-2 < u_n < u_{n+1} < 2$

On peut donc en déduire que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante et bornée sur } [-2;2]}$

(c) On sait que la suite suite (u_n) est décroissante et majorée par 2

d'après le théorème de convergence, on peut dire que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est convergente}}$