



Nom et prénom :

Exercice 1.

1. On considère la suite arithmétique (u_n) de raison 3 et de premier terme $u_0 = 2$.

Calculer u_{20} et $S_{20} = u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$.

2. On considère la suite géométrique (v_n) de raison 2 et de premier terme $v_1 = 0,01$.

Calculer v_{20} et $S_{20} = v_1 + v_2 + \dots + v_{20}$.

Correction

1. On sait que la suite (u_n) est arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 2$.

Alors pour $n \geq 0$ $u_{n+1} = u_n + 3$

pour $n \geq 0$ $u_n = u_0 + 3n = 2 + 3n$

Alors $u_{10} = 2 + 3 \times 10 = 32$

Et $S_{10} = u_1 + u_2 + \dots + u_{10} = (\text{nombre de terme}) \times \frac{\text{1er terme} + \text{dernier}}{2}$

$$S_{10} = 11 \times \frac{2 + 32}{2} = 11 \times 17 = 187$$

Donc $u_{10} = 32$ et $S_{10} = 187$

2. On sait que la suite (v_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_1 = 0,01$.

Alors pour $n \geq 1$ $v_{n+1} = v_n \times 2$

pour $n \geq 1$ $v_n = v_1 \times 2^{(n-1)} = 0,01 \times 2^{n-1}$

Alors $v_{20} = 0,01 \times 2^{20-1} = 0,01 \times 2^{19} = 5242,88$

Et $S_{20} = v_1 + v_2 + \dots + v_{20} = \text{1er terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{nb \text{ determe}}}{1 - \text{raison}} = 0,01 \times \frac{1 - 2^{20}}{1 - 2} = 10\,485,75$

Donc $v_{20} = 5242,88$ et $S_{20} = 10485,75$

**Exercice 2.**

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2 u_n - 1$.

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n = 2^{n+1} + 1$.

Correction

1. On a $u_0 = 3$

$$\text{Alors } u_1 = 2 u_0 - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$$

$$u_2 = 2 u_1 - 1 = 2 \times 5 - 1 = 9$$

$$u_3 = 2 u_2 - 1 = 2 \times 9 - 1 = 17$$

$$u_4 = 2 u_3 - 1 = 2 \times 17 - 1 = 33$$

2. On définit la propriété suivante : pour tout entier naturel n , $P_n : u_n = 2^{n+1} + 1$

Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = 3$ et $2^{0+1} + 1 = 2 + 1 = 3$ donc la propriété P_0 est vraie

Hérédité : soit un entier naturel k , on suppose que la propriété P_k est vraie (càd $u_k = 2^{k+1} + 1$) et montrons que la propriété P_{k+1} est également vraie (càd $u_{k+1} = 2^{k+2} + 1$)

$$\text{On sait que } u_{k+1} = 2 u_k - 1$$

$$\text{Or } u_k = 2^{k+1} + 1$$

$$\text{Alors } u_{k+1} = 2 \times (2^{k+1} + 1) - 1 = 2 \times 2^{k+1} + 2 - 1 = 2^{k+2} + 1$$

Donc la propriété P_{k+1} est également vraie

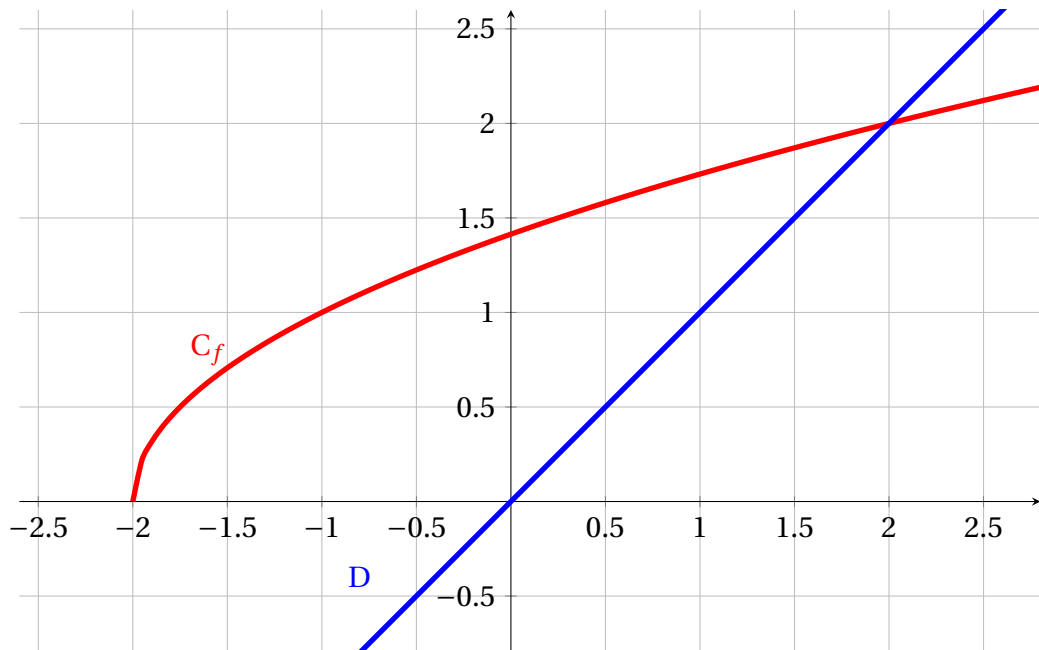
Conclusion : La propriété étant initialisée au rang 0 et héréditaire, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $u_n = 2^{n+1} + 1$



Exercice 3.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

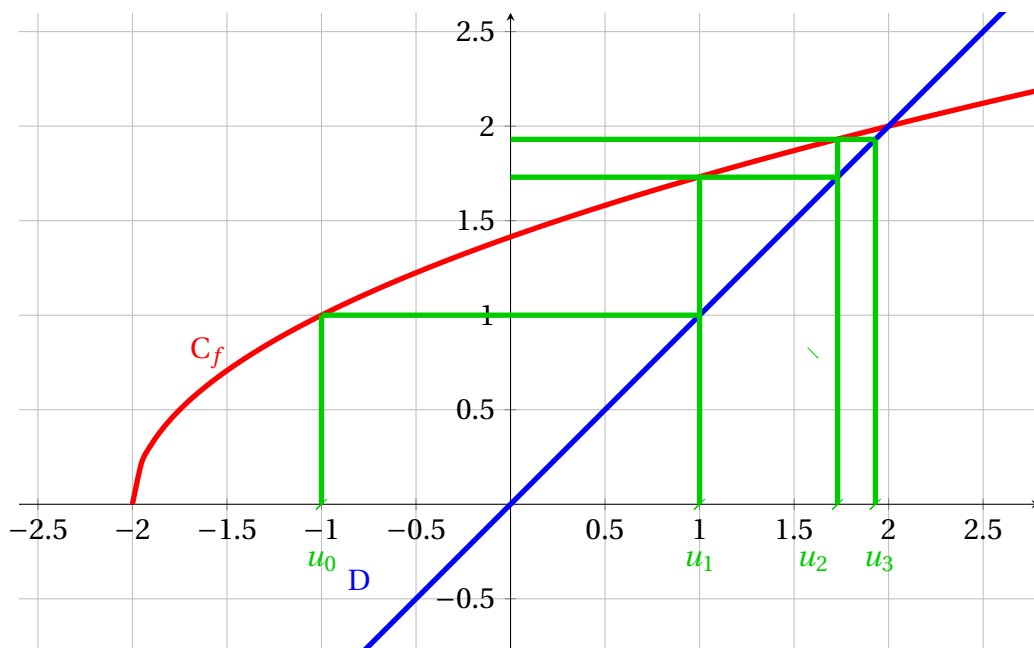
- Sans les calculer, représenter ci-dessous les quatre premiers termes de cette suite sachant qu'on a déjà tracé la droite D d'équation $y = x$ et la courbe C_f représentant la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2 + x}$.



- Conjecturer le sens de variation de cette suite.
- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $-2 < u_n < u_{n+1} < 2$
 - En déduire le sens de variation de la suite (u_n)
 - La suite (u_n) est-elle convergente?

Correction

1.





2. la suite (u_n) semble croissante

3. (a) On définit la propriété suivante : pour tout entier naturel n , $P_n : -2 < u_n < u_{n+1} < 2$

Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = -1$ et $u_1 = \sqrt{2 + u_0} = \sqrt{2 - 1} = 1$

D'où on obtient bien $-2 < u_0 < u_1 < 2$

Donc la propriété P_0 est vraie

Hérédité : soit un entier naturel k , on suppose que la propriété P_k est vraie (càd $-2 < u_k < u_{k+1} < 2$) et montrons que la propriété P_{k+1} est également vraie (càd $-2 < u_{k+1} < u_{k+2} < 2$)

On sait que $-2 < u_k < u_{k+1} < 2$

$$-2 + 2 < u_k + 2 < u_{k+1} + 2 < 2 + 2$$

$$\sqrt{0} < \sqrt{u_k + 2} < \sqrt{u_{k+1} + 2} < \sqrt{4} \quad \text{puisque la fonction racine carrée}$$

est strictement croissante

sur $[0; +\infty[$

$$-2 < 0 < u_{k+1} < u_{k+2} < 2 \quad \text{puisque } u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$$

Donc la propriété P_{k+1} est également vraie

Conclusion : La propriété étant initialisée au rang 0 et héréditaire, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $-2 < u_n < u_{n+1} < 2$

(b) Comme on vient de prouver que pour tout entier naturel n , $-2 < u_n < u_{n+1} < 2$

On peut donc en déduire que la suite (u_n) est croissante et bornée sur $[-2; 2]$

(c) On sait que la suite (u_n) est décroissante et majorée par 2

d'après le théorème de convergence, on peut dire que la suite (u_n) est convergente