



## Suites et principe de récurrence

### I Rappels sur les suites numériques

#### Définition 1 : suite numérique

On appelle suite de terme général  $u_n$  et on note  $(u_n)_{n \geq 0}$  ou plus simplement  $u$  la liste ordonnée des nombres  $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$

Les nombres sont appelés les ..... de la suite.

Une suite  $(u_n)$  permet donc d'associer à chaque entier  $n$  un réel qu'on note  $u_n$ .

#### I.1 Mode de génération

Une suite  $(u_n)$  est entièrement définie si on est capable de calculer  $u_n$  pour n'importe quelle valeur de  $n$ .

##### I.1a Suite définie explicitement

On considère la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par  $x \mapsto f(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$ .

Si  $x \in \mathbb{N}$ ,  $f(x)$  est toujours défini. On peut donc considérer la suite  $(u_n)$  de terme général  $u_n = f(n) = \frac{n+3}{n^2+1}$ .

On a alors :  $u_0 = \dots\dots\dots$   $u_1 = \dots\dots\dots$

Dans cette situation, on est bien en mesure de calculer  $u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

##### I.1b Suite définie par une relation de récurrence

#### Définition 2 : suite définie par récurrence

Soit  $f$  une fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  et  $a$  un réel quelconque.

On dit que la suite  $(u_n)$  vérifiant  $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$  est définie par récurrence.

**Remarque 1.** Quel que soit l'entier  $n$ , le calcul de  $u_n$  est donc possible mais cela peut être long puisque pour calculer il faut connaître  $u_{n-1}$ , et pour connaître  $u_{n-1}$  il faut avoir  $u_{n-2}$  ...



## Représentation graphique d'une suite définie par récurrence

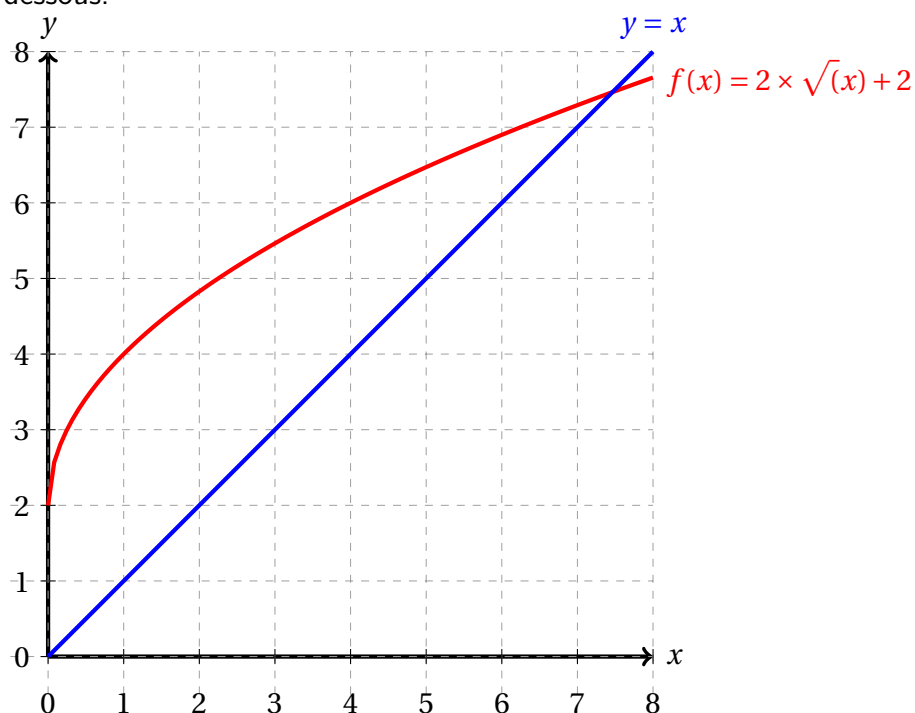
Soit  $(u_n)$  la suite définie 
$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

On trace la courbe représentative de  $f$ , ainsi que la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x$ .

On place ensuite sur l'axe des abscisses  $u_0$ . On a  $u_1 = f(u_0)$ ; on peut donc lire  $u_1$  sur l'axe des ordonnées comme l'image de  $u_0$  par  $f$ .

On reporte alors  $u_1$  sur l'axe des abscisses grâce à  $\mathcal{D}$ .

**Exemple** 1. On considère la fonction  $f$  donnée par  $f : x \mapsto 2\sqrt{x} + 2$  dont une représentation est donnée ci-dessous.



On définit la suite  $(u_n)$  par 
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

- Déterminer  $u_1, u_2$  et  $u_3$  par le calcul.

.....

.....

.....

.....

.....

- Représenter  $u_1, u_2$  et  $u_3$  sur l'axe des abscisses.



## I.2 Variations d'une suite

### Définition 3 : sens de variations

On définit les sens de variations d'une suite ainsi :

- Une suite est dite **croissante** si pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_{n+1} \geq u_n$
- Une suite est dite **décroissante** si pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_{n+1} \leq u_n$
- Une suite est dite **constante** si pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_{n+1} = u_n$

On pourrait de même définir la stricte croissance et la stricte décroissance en utilisant des inégalités strictes.

**Remarque 2.** En général, pour étudier les variations d'une suite définie par récurrence, on peut commencer par voir s'il est possible d'étudier :

- le signe de  $u_{n+1} - u_n$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , si la suite est construite avec des .....
- la position par rapport à 1 de  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ , pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $u_0 \neq 0$ , si la suite est construite avec des .....

### Propriété 1 : cas des suites explicites

Soient  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  et la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = f(n)$ .

Si  $f$  est croissante (resp. décroissante) sur  $\mathbb{R}_+$ , alors  $(u_n)$  est une suite croissante (resp. décroissante).

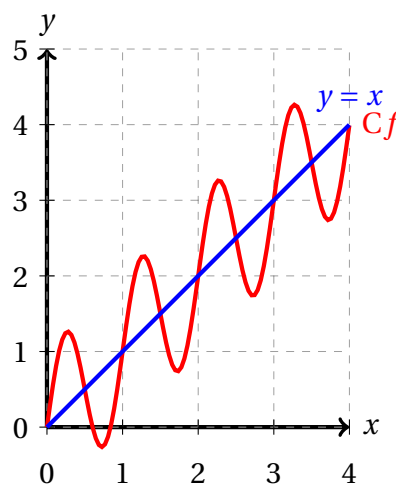
### Attention

La réciproque de la propriété ci-dessus est fausse.

Prenons par exemple la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x + \sin(2\pi x)$ .

Elle n'est pas monotone sur  $\mathbb{R}_+$ , pourtant la suite  $u_n$  définie par  $u_n = f(n)$  est croissante.

En effet, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\sin(2\pi n) = \sin(2\pi) = 0$ , d'où  $u_n = n$ .



**Exemple 2.** Étudier les variations de  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = 2n^2 + 3n - 4$ .

.....

.....

.....

.....

.....



## Suites arithmétiques et suites géométriques

### Définition 4 : suite arithmétique

Une suite est dite **arithmétique** s'il existe un réel  $r$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_{n+1} = \dots$

Le réel  $r$  est appelé la **raison** de la suite  $(u_n)$ .

### Propriété 2 : formules pour les suites arithmétiques

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison  $r$ . On a alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :

**Expression de  $u_n$  en fonction de  $n$**

$$\begin{array}{lll} \blacksquare u_n = u_0 + \dots & \blacksquare u_n = u_1 + \dots & \blacksquare u_n = u_p + \dots \end{array}$$

**Somme des termes consécutifs**

$$\begin{array}{l} \blacksquare 1 + 2 + \dots + n = \dots \\ \blacksquare \sum_{i=0}^n u_i = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \dots \\ \blacksquare \sum_{i=1}^n u_i = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \dots \\ \blacksquare \sum_{i=0}^n u_i = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} \end{array}$$

### Définition 5 : suite géométrique

Une suite est dite **géométrique** s'il existe un réel  $q$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_{n+1} = \dots$

Le réel  $q$  est appelé la **raison** de la suite  $(u_n)$ .

### Propriété 3 : formules pour les suites géométriques

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de raison  $q$ . On a alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :

**Expression de  $u_n$  en fonction de  $n$**

$$\begin{array}{lll} \blacksquare u_n = u_0 \times \dots & \blacksquare u_n = u_1 \times \dots & \blacksquare u_n = u_p \times \dots \end{array}$$

**Somme des termes consécutifs : si  $q \neq 1$  alors**

$$\begin{array}{l} \blacksquare 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \dots \\ \blacksquare \sum_{i=0}^n u_i = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \dots \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\ \blacksquare \sum_{i=1}^n u_i = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \times \dots \quad \sum_{i=p}^n u_i = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \dots \\ \blacksquare \sum_{i=0}^n u_i = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q} \end{array}$$



## II Raisonnement par récurrence

### Théorème 1 : Récurrence

Soit  $(\mathcal{P}_n)$  une famille de propriétés définies sur  $\mathbb{N}$ .

- On énonce la propriété à démontrer.
- **Initialisation** :  $(\mathcal{P}_0)$  on vérifie que la propriété est vraie pour  $n = n_0$ .
- **Hérédité** : on vérifie que si l'on suppose que la propriété est vraie à un rang  $k \geq n_0$  (c'est ce que l'on appelle l'**hypothèse de récurrence**) alors la propriété est vraie au rang  $k+1$  (le rang suivant  $k$ ),  
c'est à dire si pour tout  $k \geq 0$  on a  $\mathcal{P}_k \Rightarrow \mathcal{P}_{k+1}$ .
- **Conclusion** : la propriété est vraie pour  $n = n_0$  et elle est héréditaire ; donc par récurrence elle est vraie pour tout  $n \geq n_0$ .

**Remarque 3.** Le raisonnement par récurrence comporte deux phases :

1. Prouver que la propriété est initialisée
2. Prouver que la propriété est héréditaire

Si on montre ces deux phases la propriété est démontrée pour tout entier naturel.

**Remarque 4.** Parfois, on veut montrer qu'une propriété est vraie à partir d'un certain rang  $n_0$ . On peut utiliser ce théorème avec rang  $n_0$  au lieu de rang 0 et avec  $n \geq n_0$  au lieu de  $n \geq 0$ .

**Exemple 3.** La suite  $(u_n)$  est définie par 
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1. Démontrer que pour tout naturel  $n$ ,  $0 < u_n < 2$ . Montrons l'encadrement de  $u_n$  par récurrence.

On définit pour tout  $n$  :  $\mathcal{P}_n : 0 < u_n < 2$ .

(a) **Initialisation.**

.....  
 .....

(b) **Hérédité.**

.....  
 .....  
 .....  
 .....

(c) **Conclusion.**

.....  
 .....



2. Prouver que la suite est strictement croissante.

Montrons que  $(u_n)$  est croissante. On définit pour tout  $n : \mathcal{P}_n : u_n < u_{n+1}$ .

(a) **Initialisation.**

.....  
 .....

(b) **Hérédité.**

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

(c) **Conclusion.**

.....  
 .....

#### Propriété 4 : Inégalité de Bernoulli

Soit un réel  $a$  strictement positif et pour tout entier naturel  $n : (1 + a)^n \geq 1 + na$ .

Démontrons par récurrence la propriété pour tout  $n \in \mathbb{N} : \mathcal{P}_n : (1 + a)^n \geq 1 + na$ .

1. **Initialisation.**

..... ainsi  $\mathcal{P}_0$  est vraie.

2. **Hérédité.**

Soit  $k \in \mathbb{N}$ , on suppose que  $\mathcal{P}_k$  est vraie, montrons que ..... est alors vraie.

On doit donc montrer que si  $(1 + a)^k \geq 1 + ka$  alors .....

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

Par conséquent  $\mathcal{P}_{k+1}$  .....

La propriété est donc héréditaire.

3. **Conclusion.**

La propriété est initialisée au rang .... et elle est héréditaire alors par le principe de récurrence,

on peut dire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n$  est vraie, c'est à dire .....



**Attention.** Si l'étape 1 ou si l'étape 2 manque, on peut arriver à une fausse conclusion.

**Contre-exemple 5** (Seul l'hérédité est vérifiée).

On considère pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $\mathcal{P}_n$  :  $\forall n \in \mathbb{N}, 3 \text{ divise } 2^n$ .

Si  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ , alors 3 divise .....

Cela veut dire que l'on peut écrire  $2^n = \dots \times k$  pour un certain entier naturel  $k$ .

En multipliant par ....., on obtient  $2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2 \times 3k = (2k) \times 3$ .

Donc ..... divise .....

Bien qu'héritaire, rien ne prouve que cette propriété soit vraie.

Elle n'a pas été initialisée car ..... , il manque l'étape 1.

Il se trouve même qu'elle est fausse pour tout  $n$ .

**Contre-exemple 6** (Seul l'initialisation est vérifiée).

Soit la propriété suivante :  $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 - n + 41$  est un nombre premier.

Pour tout  $n$ , on définit  $\mathcal{P}_n$  :  $n^2 - n + 41$  est un nombre premier.

Posons  $u_n = n^2 - n + 41$ .

On peut calculer dans un tableau de valeurs,  $u_0, u_1, u_2, \dots$

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

Alors  $u_0, u_1$  et  $u_2$  sont .....

Mais  $u_{41} = \dots$

**Conclusion** : La véracité d'une propriété pour quelques valeurs ne prouve pas le cas général.



### III Suite majorée, minorée, bornée

#### Définition 6 : majoration, minoration

On dit que la suite  $(u_n)$  est

- **majorée** si, et seulement si, il existe un réel  $M$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$ .
- **minorée** si, et seulement si, il existe un réel  $m$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$ .

#### Exemple 4.

Montrer que la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$  est bornée par l'intervalle  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ .

- Montrons que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n \leq 1$ .

On sait que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \leq n+1$  d'où  $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$  alors  $\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2n}$ .

Ainsi  $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}$  (on a ..... termes)

Alors  $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \leq n \times \dots$

Donc  $u_n \leq \dots$

- Montrons que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n \geq \dots$

On sait que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \leq 2n$  d'où  $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{2n}$ .

Ainsi  $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \dots$  (on a ..... termes).

Alors  $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \dots$

Donc  $u_n \geq \dots$

Conclusion : Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ , autrement dit, la suite  $(u_n)$  est bornée dans  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ .



## Théorèmes de convergence

On admet les théorèmes suivants :

### Théorème 2 : divergence

- Si une suite  $(u_n)$  est croissante et non majorée alors la suite diverge vers  $+\infty$ .
- Si une suite  $(u_n)$  est ..... et non ..... alors la suite diverge vers  $-\infty$ .

**Attention** : La réciproque de ce théorème est fausse ! Si une suite diverge vers  $+\infty$ , elle n'est pas nécessairement croissante.

Pour s'en convaincre, voici deux suites qui divergent vers  $+\infty$  et qui ne sont pas monotones :

$$u_n = n + (-1)^n \text{ et } v_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### Théorème 3 : convergence bornée

- Si une suite  $(u_n)$  est croissante et majorée alors la suite converge.
- Si une suite  $(u_n)$  est décroissante et ..... alors la suite converge.

**Attention** : Ce théorème permet de montrer qu'une suite converge vers une limite  $\ell$  mais ne donne pas la valeur de cette limite.

On peut seulement dire que, si  $(u_n)$  est croissante et majorée par  $M$  alors  $\ell \leq M$ .

De même si  $(u_n)$  est décroissante et minorée par  $m$  alors  $\ell \geq m$ .

**Exemple** 5. Soit la suite  $(u_n)$  définie par 
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$$

1. Montrer que  $(u_n)$  est croissante et majorée par 4.
2. En déduire que  $(u_n)$  converge.
3. On admet que  $(u_n)$  converge vers 4, déterminer à l'aide d'un algorithme, l'entier  $N$  à partir duquel  $u_n > 3,99$ .



## Réponse

1. Montrons par récurrence que la suite  $(u_n)$  est croissante et majorée par 4, revient à montrer que pour tout  $n$ , on a  $\mathcal{P}_n : 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ .

(a) **Initialisation.** Vérifions que  $\mathcal{P}_0$  est vraie. On a  $u_0 = \dots\dots\dots$  et  $u_1 = \dots\dots\dots$

Alors  $0 \leq \dots\dots\dots \leq \dots\dots\dots \leq 4$ . Ainsi la proposition est initialisée.

(b) **Hérédité.** On suppose que pour un certain  $k$  on a  $\mathcal{P}_k : 0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 4$ .

Il faut montrer que  $\mathcal{P}_{k+1}$  est vraie, c'est à dire que  $\dots\dots\dots$

On part de  $0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 4$ .

On en déduit que  $\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

L'hérédité est validée.

(c) **Conclusion.** Par  $\dots\dots\dots$  et  $\dots\dots\dots$ , la suite  $(u_n)$  est croissante et majorée par 4.

2. En déduire que  $(u_n)$  converge.

$\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

3. En admettant que  $(u_n)$  converge vers 4, on peut utiliser un algorithme comme ci-dessous afin de déterminer l'entier  $N$  à partir duquel  $u_n > 3,99$ .

```

1  Entrée
2  N est un entier
3  U est un nombre réel
4  Initialisation
5  ..... → U
6  ..... → N
7  Traitement
8  Tant que  $|U - 4| \dots\dots\dots 10^{-2}$  faire
9      | ..... → U
10     |  $N + 1 \rightarrow \dots\dots\dots$ 
11 FinTantque
12 Sortie
13 Afficher ..... ,  $|U - 4|$  .

```