Résoudre une équation ou une inéquation avec exponentielles

Pour résoudre une équation d'inconnue x réel comportant des exponentielles :

1. On détermine l'ensemble des valeurs qu'on peut donner à x.
2. On essaye selon le cas de se ramener à :
   - Une équation de la forme $e^{u(x)} = e^{v(x)}$ où u et v sont deux fonctions.
     Alors, $e^{u(x)} = e^{v(x)} \iff u(x) = v(x)$ et, éventuellement, $u(x) = v(x) \iff u(x) - v(x) = 0$.
   - Une équation qu'on sait résoudre après avoir effectué un changement de variable.

La méthode est analogue pour résoudre une inéquation.

Exercice d'application

Déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions des équations et inéquations.

1. $e^{x^2+2x-3} = 1$
2. $2e^{2x} - e^x - 1 = 0$
3. $e^{\sqrt{3x-5}} < e$
4. $\dfrac{e^{2x+1}}{e^{x-4}} \geqslant e^{x^2-1}$

Correction

Dans les cas **1**, **2** et **4**, x peut prendre toute valeur réelle, donc on résout dans $\mathbb{R}$.

1. $e^{x^2+2x-3} = 1 \iff e^{x^2+2x-3} = e^0 \iff x^2 + 2x - 3 = 0 \iff (x+3)(x-1) = 0$.
   Donc $\mathscr{S} = \{-3\ ;\ 1\}$.

2. $2e^{2x} - e^x - 1 = 0 \iff 2\left(e^x\right)^2 - e^x - 1 = 0 \iff 2\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 1 = 0$ en posant $\mathrm{X} = e^x$.
   $2\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 1 = 0$ pour $\mathrm{X} = -\dfrac{1}{2}$ ou $\mathrm{X} = 1$. D'où, $e^x = -\dfrac{1}{2}$ (impossible) ou $e^x = 1 \iff x = 0$.
   Finalement, l'équation $2e^{2x} - e^x - 1 = 0$ n'a que 0 pour solution.
   Donc, $\mathscr{S} = \{0\}$.

3. Il faut que x soit tel que $3x - 5 \geqslant 0 \iff x \geqslant \dfrac{5}{3}$ donc on résout dans $\left[\dfrac{5}{3}\ ;\ +\infty\right[$.
   $e^{\sqrt{3x-5}} < e^1 \iff \sqrt{3x-5} < 1 \iff 0 \leqslant 3x - 5 < 1 \iff \dfrac{5}{3} \leqslant x < 2$.
   Donc, $\mathscr{S} = \left[\dfrac{5}{3}\ ;\ 2\right[$.

4. $\dfrac{e^{2x+1}}{e^{x-4}} \geqslant e^{x^2-1} \iff e^{2x+1-x+4} \geqslant e^{x^2-1} \iff e^{x+5} \geqslant e^{x^2-1} \iff x + 5 \geqslant x^2 - 1 \iff x^2 - x - 6 \leqslant 0$.
   Or, $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$. Ainsi, $x^2 - x - 6 \leqslant 0$ si $-2 \leqslant x \leqslant 3$.
   Donc $\mathscr{S} = [-2;3]$.