



Nom et prénom :

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{4} + 2x - \frac{4}{3}$

1. Calculer et **factoriser** $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de f sur $] -\infty; +\infty[$. (Ne pas calculer les images).

Correction

1. On sait que $f(x) = -\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{4} + 2x - \frac{4}{3}$

Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale

Alors $f'(x) = -3 \times \frac{x^2}{12} + 2 \times \frac{x}{4} + 2 = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2$

C'est un polynôme de degré 2, on calcule son discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \times 2 = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$$

Ainsi $f'(x)$ a deux racines : $x_1 = \frac{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}}}{2 \times \frac{-1}{4}} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}} = 1 \times (-2) = -2$

et $x_2 = \frac{-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}}}{2 \times \frac{-1}{4}} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}} = (-2) \times (-2) = 4$

Donc $f'(x) = -\frac{1}{4}(x+2)(x-4)$

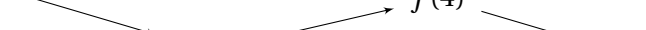
2. Dresser le tableau de variations de f sur $] -\infty; +\infty[$. (Ne pas calculer les images).

On sait que $f'(x) = -\frac{1}{4}(x+2)(x-4)$ d'après la question précédente

On peut en déduire le tableau de signe

x	$-\infty$	-2	4	∞
$-\frac{1}{4}$	$-$		$-$	$-$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$
$x-4$	$-$		$-$	0
signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$	0
				$-$

On en déduit donc les variations de la fonction f

x	$-\infty$	-2	4	∞	
signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
variations de f					



Exercice 2.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{x^2-3} = e$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{-x} = -e^{(x-6)x}$

Correction

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{x^2-3} = 1$

$$\begin{aligned} e^{x^2-3} = 1 &\iff e^{x^2-3} = e^0 \\ &\iff x^2 - 3 = 0 \\ &\iff x^2 - 3 = 0 \\ &\iff (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0 \\ &\iff x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{-x} = -e^{(x-6)x}$

On a $e^{-x} = -e^{(x-6)x} \iff e^{-x} + e^{(x-6)x} = 0$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ ainsi que $e^{(x-6)x} > 0$

D'où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} + e^{(x-6)x} > 0$ et donc jamais égale à 0

Donc il n'y a pas de solution : $\mathcal{S} = \emptyset$

Exercice 3.

1. Simplifier l'expression $\frac{e^{x(x+2)}}{e^{x^2+4x-7}}$
2. Résoudre l'inéquation $\frac{e^{x(x+2)}}{e^{x^2+4x-7}} \geq 1$

Correction

1. Simplifier l'expression $\frac{e^{x(x+2)}}{e^{x^2+4x-7}}$

$$\frac{e^{x(x+2)}}{e^{x^2+4x-7}} = e^{x(x+2)-(x^2+4x-7)} = e^{x^2+2x-x^2-4x+7} = e^{-2x+7}$$

2. Résoudre l'inéquation $\frac{e^{x(x+2)}}{e^{x^2+4x-7}} \geq 1$

$$\begin{aligned} \frac{e^{x(x+2)}}{e^{x^2+4x-7}} \geq 1 &\iff e^{-2x+7} \geq e^0 \\ &\iff -2x + 7 \geq 0 \\ &\iff -2x \geq -7 \\ &\iff x \leq \frac{7}{2} \quad (\text{car } -2 < 0) \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \left] -\infty; \frac{7}{2} \right]$

**Exercice 4.**

- Déterminer les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (5 - 4x)e^x$.
- Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de h au point d'abscisse 0.

Correction1. • **Calcul de $h'(x)$.**

On a $h(x) = (5 - 4x)e^x$

Donc la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

On note $h = uv$ avec $u(x) = 5 - 4x$ et $v(x) = e^x$ d'où $u'(x) = -4$ et $v'(x) = e^x$.

On en déduit que $h' = u'v + v'u$

D'où $h'(x) = -4e^x + (5 - 4x)e^x = (-4 + 5 - 4x)e^x = (1 - 4x)e^x$

• **Signe de $h'(x)$ et variations de h .**

Pour tout réel x , $e^x > 0$, donc le signe de $h'(x)$ est le même que celui de $1 - 4x$

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	∞
signe de $1 - 4x$	+	0	-
signe de $h'(x)$	+	0	-
variations de h			

2. $T_0 : y = h'(0)(x - 0) + h(0)$

Or $h'(0) = (1 - 4 \times 0)e^0 = 1$, et $h(0) = (5 - 4 \times 0)e^0 = 5$

Donc $T_0 : y = x + 5$