Nom et prénom : ....

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{x^3}{12} + \dfrac{x^2}{4} + 2x - \dfrac{4}{3}$

1. Calculer et **factoriser** $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de f sur $]-\infty; +\infty[$. (Ne pas calculer les images).
3. Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1.

<u>Correction</u>

1. On sait que $f(x) = -\dfrac{x^3}{12} + \dfrac{x^2}{4} + 2x - \dfrac{4}{3}$

   Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale

   Alors $f'(x) = -3 \times \dfrac{x^2}{12} + 2 \times \dfrac{x}{4} + 2 = -\dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{2}x + 2$

   C'est un polynôme de degré 2, on calcule son discriminant

   $\Delta = b^2 - 4ac = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 4 \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) \times 2 = \dfrac{1}{4} + 2 = \dfrac{9}{4}$

   Ainsi $f'(x)$ a deux racines : $x_1 = \dfrac{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}}}{2 \times \frac{-1}{4}} = \dfrac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}} = 1 \times (-2) = -2$

   et $x_2 = \dfrac{-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}}}{2 \times \frac{-1}{4}} = \dfrac{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}} = (-2) \times (-2) = 4$

   Donc $\boxed{f'(x) = -\dfrac{1}{4}(x+2)(x-4)}$

2. Dresser le tableau de variations de f sur $]-\infty; +\infty[$. (Ne pas calculer les images).

   On sait que $f'(x) = -\dfrac{1}{4}(x+2)(x-4)$ d'après la question précédente

   On peut en déduire le tableau de signe

x	$-\infty$		-2		4		∞
$-\dfrac{1}{4}$		$-$		$-$		$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   On en déduit donc ls varaitaions de la fonctin f

x	$-\infty$		-2		4		∞
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de f		$\searrow$	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(4)$	$\searrow$	

3. L'équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1 a pour équation $\quad y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1)$ $\quad$ c'est à dire $\quad y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$

   Avec $f(-1) = -\dfrac{(-1)^3}{12} + \dfrac{(-1)^2}{4} + 2\times(-1) - \dfrac{4}{3} = -\dfrac{-1}{12} + \dfrac{1}{4} - 2 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{1+3-24-16}{12} = \dfrac{-36}{12} = -3$

   et

   $f'(-1) = -\dfrac{1}{4}(-1)^2 + \dfrac{1}{2}\times(-1) + 2 = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + 2 = \dfrac{-1-2+8}{4} = \dfrac{5}{4}$

   d'où $(\mathscr{T})\ :\ y = \dfrac{5}{4}(x+1) - 3$

   $(\mathscr{T})\ : y = \dfrac{5}{4}x + \dfrac{5}{4} - 3$

   $(\mathscr{T})\ : y = \dfrac{5}{4}x + \dfrac{5-12}{4}$

   Donc $\boxed{(\mathscr{T})\ : y = \dfrac{5}{4}x - \dfrac{7}{4}}$

Exercice 2.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{(x-6)x} = 1$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{-x} = -1$
3. Résoudre l'inéquation $e^{-4x+3} > \mathrm{e}$

Correction

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{(x-6)x} = 1$

   $$\begin{aligned} e^{(x-6)x} = 1 &\iff e^{(x-6)x} = e^x0 \\ &\iff (x-6)x = 0 \\ &\iff x = 6 \text{ ou } x = 0 \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\mathscr{S} = \{5;0\}}$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{-x} = -1$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0 > -1$

   Donc il n'y a pas de solution : $\boxed{\mathscr{S} = \emptyset}$

3. Résoudre l'inéquation $e^{-4x+3} > \mathrm{e}$

   $$\begin{aligned} e^{-4x+3} > \mathrm{e} &\iff e^{-4x+3} > e^1 \\ &\iff -4x+3 > 1 \\ &\iff -4x > -2 \\ &\iff x < \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \quad (\text{car } -4 < 0) \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\mathscr{S} = \left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right[}$

Exercice 3. Déterminer les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (5-4x)\,e^x$.

Correction

- **Calcul de h'(x).**

  On a $h(x) = (5-4x)\,e^x$

  Donc la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

  On note $h = uv$ avec $u(x) = 5-4x$ et $v(x) = e^x$ d'où $u'(x) = -4$ et $v'(x) = e^x$.

  On en déduit que $h' = u'v + v'u$

  D'où $h'(x) = -4e^x + (5-4x)\,e^x = (-4+5-4x)e^x = (1-4x)e^x$

- **Signe de $h'(x)$ et variations de h.**

  Pour tout réel x, $e^x > 0$, donc le signe de $h'(x)$ est le même que celui de $1-4x$

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		∞
signe de $1-4x$		$+$	0	$-$	
signe de $h'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de h		$\nearrow$	$h\left(\frac{1}{4}\right)$	$\searrow$	