



Nom et prénom :

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} + x + \frac{1}{6}$

1. Calculer et **factoriser** $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de f sur $] -\infty; +\infty[$. (Ne pas calculer les images).

Correction

1. On sait que $f(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} + x + \frac{1}{6}$

Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale

Alors $f'(x) = -3 \times \frac{x^2}{6} + 2 \times \frac{x}{4} + 1 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$

C'est un polynôme de degré 2, on calcule son discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 1 = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$$

Ainsi $f'(x)$ a deux racines : $x_1 = \frac{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}}}{2 \times \frac{-1}{2}} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$

et $x_2 = \frac{-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}}}{2 \times \frac{-1}{2}} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{-1} = \frac{-2}{-1} = 2$

Donc $f'(x) = -\frac{1}{2}(x+1)(x-2)$

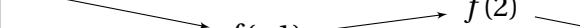
2. Dresser le tableau de variations de f sur $] -\infty; +\infty[$. (Ne pas calculer les images).

On sait que $f'(x) = -\frac{1}{2}(x-1)(x+2)$ d'après la question précédente

On peut en déduire le tableau de signe

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$-\frac{1}{2}$	$-$		$-$	$-$
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$
$x+2$	$-$		$-$	0
signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$	0

On en déduit donc les variations de la fonction f

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
variations de f					


Exercice 2.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-8} = e$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{\frac{1}{2}-x} = -e^{-x}$

Correction

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{x^2-8} = e$

$$\begin{aligned} e^{x^2-8} = e &\iff e^{(x-5)x} = e^1 \\ &\iff x^2 - 8 = 1 \\ &\iff x^2 - 9 = 0 \\ &\iff (x-3)(x+3) = 0 \\ &\iff x = 3 \text{ ou } x = -3 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \{-3; 3\}$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{\frac{1}{2}-x} = -e^{-x}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $e^{-x} > 0$ donc $-e^{-x} < 0$. Or $e^{\frac{1}{2}-x} > 0$, donc il n'y a pas de solution : $\mathcal{S} = \emptyset$

- Exercice 3.** 1. Simplifier l'expression $\frac{e^{x(x+1)}}{e^{x^2+3x-5}}$

2. Résoudre l'inéquation $\frac{e^{x(x+1)}}{e^{x^2+3x-5}} \leq 1$

Correction

1. Simplifier l'expression $\frac{e^{x(x+1)}}{e^{x^2+3x-5}}$

$$\frac{e^{x(x+1)}}{e^{x^2+3x-5}} = e^{x(x+1)-(x^2+3x-5)} = e^{x^2+x-x^2-3x+5} = e^{-2x+5}$$

2. Résoudre l'inéquation $\frac{e^{x(x+1)}}{e^{x^2+3x-5}} \leq 1$

$$\begin{aligned} \frac{e^{x(x+1)}}{e^{x^2+3x-5}} \leq 1 &\iff e^{-2x+5} \leq e^0 \\ &\iff -2x + 5 \leq 0 \\ &\iff -2x \leq -5 \\ &\iff x \geq \frac{5}{2} \quad (\text{car } -2 < 0) \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \left[\frac{5}{2}; +\infty \right[$

- Exercice 4.** 1. Déterminer les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (4-3x)e^x$.

2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de h au point d'abscisse 0.



Correction

1. Déterminer les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (4 - 3x)e^x$.

- **Calcul de $h'(x)$.**

On a $h(x) = (4 - 3x)e^x$

Donc la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

On note $h = uv$ avec $u(x) = 4 - 3x$ et $v(x) = e^x$ d'où $u'(x) = -3$ et $v'(x) = e^x$.

On en déduit que $h' = u'v + v'u$

D'où $h'(x) = -3e^x + (4 - 3x)e^x = (-3 + 4 - 3x)e^x = (1 - 3x)e^x$

- **Signe de $h'(x)$ et variations de h .**

Pour tout réel x , $e^x > 0$, donc le signe de $h'(x)$ est le même que celui de $1 - 3x$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
signe de $1 - 3x$	+	0	-
signe de $h'(x)$	+	0	-
variations de h			

2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de h au point d'abscisse 0.

$$T_0 : y = h'(0)(x - 0) + h(0)$$

$$\text{Or } h'(0) = (1 - 3 \times 0)e^0 = 1, \text{ et } h(0) = (4 - 3 \times 0)e^0 = 4$$

$$\text{Donc } T_0 : y = x + 4$$