Nom et prénom : ....

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^2}{4} + x + \dfrac{1}{6}$

1. Calculer et **factoriser** $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de f sur $]-\infty;+\infty[$. (Ne pas calculer les images).
3. Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe représentative de f au point d'abscisse -2.

Correction

1. On sait que $f(x) = -\dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^2}{4} + x + \dfrac{1}{6}$
   Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale
   Alors $f'(x) = -3 \times \dfrac{x^2}{6} + 2 \times \dfrac{x}{4} + 1 = -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x + 1$
   C'est un polynôme de degré 2, on calcule son discriminant
   $\Delta = b^2 - 4ac = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 4 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) \times 1 = \dfrac{1}{4} + 2 = \dfrac{9}{4}$
   Ainsi $f'(x)$ a deux racines : $x_1 = \dfrac{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}}}{2 \times \frac{-1}{2}} = \dfrac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{-1} = \dfrac{1}{-1} = -1$
   et $x_2 = \dfrac{-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}}}{2 \times \frac{-1}{2}} = \dfrac{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{-1} = \dfrac{-2}{-1} = 2$
   Donc $\boxed{f'(x) = -\dfrac{1}{2}(x+1)(x-2)}$
2. Dresser le tableau de variations de f sur $]-\infty;+\infty[$. (Ne pas calculer les images).
   On sait que $f'(x) = -\dfrac{1}{2}(x-1)(x+2)$ d'après la question précédente
   On peut en déduire le tableau de signe

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$-\dfrac{1}{2}$		$-$		$-$		$-$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit donc ls varaitaions de la fonctin f

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de f		$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	

3. L'équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe représentative de f au point d'abscisse -2 a pour équation $\quad y = f'(-2)(x-(-2)) + f(-2) \quad$ c'est à dire $\quad y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$
   Avec $f(-1) = -\dfrac{(-2)^3}{6} + \dfrac{(-2)^2}{4} + (-2) + \dfrac{1}{6} = \dfrac{8}{6} + \dfrac{4}{4} + (-2) + \dfrac{1}{6} = \dfrac{4}{3} - 1 + \dfrac{1}{6} == \dfrac{8-6+1}{6} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$
   et
   $f'(-1) = -\dfrac{1}{2}(-2)^2 + \dfrac{1}{2} \times (-2) + 1 = -2 - 1 + 1 = -2$
   d'où $(\mathscr{T})\ :\ y = -2(x+2) + \dfrac{1}{2}$
   $(\mathscr{T})\ : y = -2x - 4 + \dfrac{1}{2}$
   Donc $\boxed{(\mathscr{T})\ : y = -2x - \dfrac{7}{2}}$

Exercice 2.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{(x-5)x} = 1$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{6-x} = -1$
3. Résoudre l'inéquation $e^{-6x+5} \leq \mathrm{e}$

<u>Correction</u>

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{(x-5)x} = 1$
   $$\begin{aligned} e^{(x-5)x} = 1 &\iff e^{(x-5)x} = e^x 0 \\ &\iff (x-5)x = 0 \\ &\iff x = 5 \text{ ou } x = 0 \end{aligned}$$
   Donc $\boxed{\mathscr{S} = \{5;0\}}$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{6-x} = -1$
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{6-x} > 0 > -1$
   Donc il n'y a pas de solution : $\boxed{\mathscr{S} = \emptyset}$
3. Résoudre l'inéquation $e^{-6x+5} \leq \mathrm{e}$
   $$\begin{aligned} e^{-6x+5} \leq \mathrm{e} &\iff e^{-6x+5} \leq e^1 \\ &\iff -6x+5 \leq 1 \\ &\iff -6x \leq -4 \\ &\iff x \geq \frac{-4}{-6} \qquad (\text{car } -3 < 0) \\ &\iff x \geq \frac{2}{3} \end{aligned}$$
   Donc $\boxed{\mathscr{S} = \left[\dfrac{2}{3};+\infty\right[}$

Exercice 3. Déterminer les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (4-3x)\,e^x$.

<u>**Correction**</u>

- **Calcul de h'(x).**

  On a $h(x) = (4-3x)\,e^x$

  Donc la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

  On note $h = uv$ avec $u(x) = 4-3x$ et $v(x) = e^x$ d'où $u'(x) = -3$ et $v'(x) = e^x$.

  On en déduit que $h' = u'v + v'u$

  D'où $h'(x) = -3e^x + (4-3x)\,e^x = (-3+4-3x)e^x = (1-3x)e^x$

- **Signe de $h'(x)$ et variations de h.**

  Pour tout réel x, $e^x > 0$, donc le signe de $h'(x)$ est le même que celui de $1-3x$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
signe de $1-3x$		$+$	0	$-$	
signe de $h'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de h		$\nearrow$	$h\left(\frac{1}{3}\right)$	$\searrow$	