Problèmes tirés de E3C

Exercice 1.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 7x^2 + 11x - 19$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3x^2 + 14x + 11 > 0$.

   En déduire le tableau de variations de la fonction f.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
4. Justifier que 1 est solution de $x^3 + 7x^2 + 11x - 19 = 0$.

   Vérifier que pour tout réel x : $f(x) = (x-1)\left(x^2 + 8x + 19\right)$.
5. Étudier le signe de la fonction f et en dresser le tableau de signes sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.

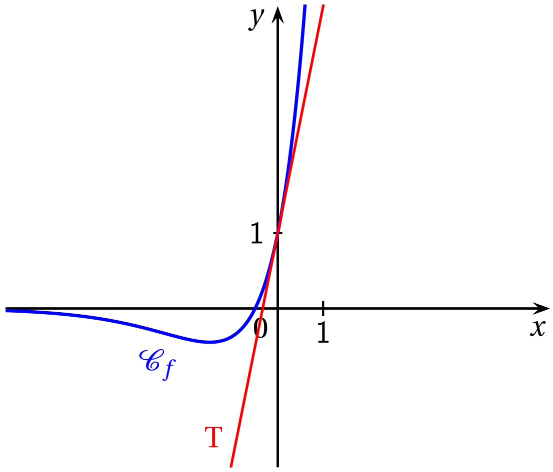
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\quad f(x) = \mathrm{e}^{2x} + 6\,\mathrm{e}^{x} - 8x - 4$.

Dans le plan rapporté à un repère orthogonal, on considère :

- $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f ;
- $\mathscr{D}$ la droite d'équation cartésienne $y = -8x - 4$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2\left(\mathrm{e}^{x} - 1\right)\left(\mathrm{e}^{x} + 4\right)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
5. La courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ ont-elles un point commun ? Justifier.

Exercice 3.



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)\,\mathrm{e}^{x}$.
Sur le graphique ci-dessous, sont tracées la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f, et la droite T, tangente à cette courbe au point d'abscisse 0.

1. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec laxe des abscisses.
2. Montrer que, pour tout x réel, que $f'(x) = (2x+3)\,\mathrm{e}^{x}$.
3. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis préciser les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. (a) Déterminer l'équation réduite de la tangente T.

   (b) Justifier graphiquement que, pour tout réel x, on a : $(2x+1)\,\mathrm{e}^{x} \geqslant 3x+1$.

Exercice 4.

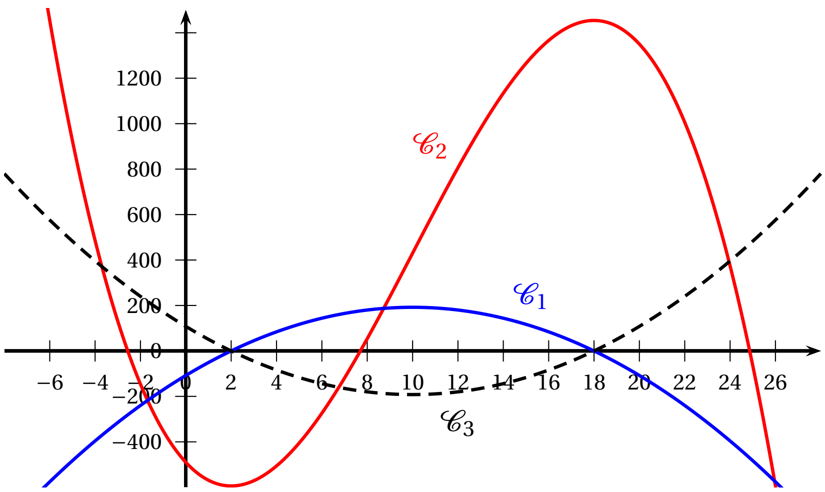
Soit h la fonction définie sur $[0\,;\,26]$ par $\quad h(x) = -x^3 + 30x^2 - 108x - 490$.

1. Soit h' la fonction dérivée de h.

   Exprimer $h'(x)$ en fonction de x.
2. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de h et $\mathscr{C}'$ celle de h'.

   (a) Identifier $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sur le graphique orthogonal ci-dessous parmi les trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ proposées.

   (b) Justifier le choix pour $\mathscr{C}'$.



3. Soit (T) la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0. Déterminer son équation réduite.
4. Étudier le signe de $h'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction h sur $[0\,;\,26]$.