Elements de correction des exercices : Problèmes (2)

Exercice 1.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 7x^2 + 11x - 19$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3x^2 + 14x + 11 > 0$.

   En déduire le tableau de variations de la fonction f.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
4. Justifier que 1 est solution de $x^3 + 7x^2 + 11x - 19 = 0$.

   Vérifier que pour tout réel x : $f(x) = (x-1)\left(x^2 + 8x + 19\right)$.
5. Étudier le signe de la fonction f et en dresser le tableau de signes sur $\mathbb{R}$.

Correction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 7x^2 + 11x - 19$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   $f'(x) = 3x^2 + 7 \times 2x + 11 \times 1 = 3x^2 + 14x + 11$.
2. On résout dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3x^2 + 14x + 11 > 0$.

   On cherche d'abord si le polynôme admet des racines dans $\mathbb{R}$.

   $\Delta = b^2 - 4ac = 14^2 - 4 \times 3 \times 11 = 196 - 132 = 64 = 8^2$

   Le discriminant est positif donc le polynôme admet deux racines réelles :
   $x' = \dfrac{-b-\sqrt{\delta}}{2a} = \dfrac{-14-8}{6} = \dfrac{-22}{6} = \dfrac{-11}{3}$ et $x'' = \dfrac{-b+\sqrt{\delta}}{2a} = \dfrac{-14+8}{6} = \dfrac{-6}{6} = -1$.
   On en déduit le signe du polynôme $3x^2+14x+11$ qui est du signe de $a = 3$ donc positif, à l'extérieur des racines :

x	$-\infty$		$-\dfrac{11}{3}$		-1		$+\infty$
$3x^2+14x+11$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   L'ensemble solution de l'inéquation $3x^2 + 14x + 11 > 0$ est donc $S = \left]-\infty\ ;\ -\dfrac{11}{3}\right[\cup \left]-1\ ;\ +\infty\right[$.

   On cherche les extrémums : $f\left(-\dfrac{11}{3}\right) = -\dfrac{392}{27} \approx -14{,}52$ et $f(-1) = -24$.

   On établit le tableau de variations de la fonction f.

x	$-\infty$		$-\frac{11}{3}$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\approx -14,52$	$\searrow$	-24	$\nearrow$	

3. La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f(0) + f'(0)(x-0)$.

   $f(x) = x^3 + 7x^2 + 11x - 19$ donc $f(0) = -19$; $f'(x) = 3x^2 + 14x + 11$ donc $f'(0) = 11$.

   La tangente a pour équation : $y = -19 + 11(x-0)$ c'est-à-dire $y = 11x - 19$.

4. Soit l'équation $x^3 + 7x^2 + 11x - 19 = 0$.

   $1^3 + 7 \times 1^2 + 11 \times 1 - 19 = 19 - 19 = 0$ donc 1 est solution de l'équation $x^3 + 7x^2 + 11x - 19 = 0$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x-1)(x^2+8x+19) = x^3 + 8x^2 + 19x - x^2 - 8x - 19 = x^3 + 7x^2 + 11x - 19 = f(x)$.

5. Étudier le signe de la fonction f revient à étudier le signe de $f(x) = (x-1)(x^2+8x+19)$, donc le signe de chacun des facteurs.

   - $x - 1 > 0 \iff x > 1$
   - Pour étudier le signe de $x^2 + 8x + 19$, on cherche si ce polynôme a des racines.

     $\Delta = 8^2 - 4 \times 1 \times 19 = -12 < 0$ donc le polynôme n'a pas de racine, il garde donc un signe constant, celui du coefficient de x^2 ; il est donc toujours positif.

   On établit le tableau de signes de la fonction f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$x^2+8x+19$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 2.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{2x} + 6\mathrm{e}^{x} - 8x - 4$.

Dans le plan rapporté à un repère orthogonal, on considère :

- $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f ;
- $\mathscr{D}$ la droite d'équation cartésienne $y = -8x - 4$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2\left(\mathrm{e}^{x} - 1\right)\left(\mathrm{e}^{x} + 4\right)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
5. La courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ ont-elles un point commun ? Justifier.

Correction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{2x} + 6\mathrm{e}^{x} - 8x - 4$.

Dans le plan rapporté à un repère orthogonal, on considère :

- $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f ;
- $\mathscr{D}$ la droite d'équation cartésienne $y = -8x - 4$.

1. - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} + 6\mathrm{e}^{x} - 8$.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\left(\mathrm{e}^{x} - 1\right)\left(\mathrm{e}^{x} + 4\right) = 2\left(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 4\mathrm{e}^{x} - 4\right) = 2\mathrm{e}^{2x} + 6\mathrm{e}^{x} - 8$.

   On peut donc en déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2\left(\mathrm{e}^{x} - 1\right)\left(\mathrm{e}^{x} + 4\right)$.
2. On étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   - Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{x} > 0$ donc $\mathrm{e}^{x} + 4 > 0$.
   - On sait que $\mathrm{e}^{x} > 1 \iff x > 0$ donc $\mathrm{e}^{x} - 1 > 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   - De plus $\mathrm{e}^{x} - 1 = 0 \iff \mathrm{e}^{x} = 1 \iff x = 0$.

   D'où le tableau de signes de $f'(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

3. La dérivée s'annule et change de signe pour $x = 0$; $f(0) = \mathrm{e}^{0} + 6\mathrm{e}^{0} - 0 - 4 = 3$.

   On dresse le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	3	$\nearrow$	

4. La fonction f admet pour minimum le nombre strictement positif 3, donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) > 0$.

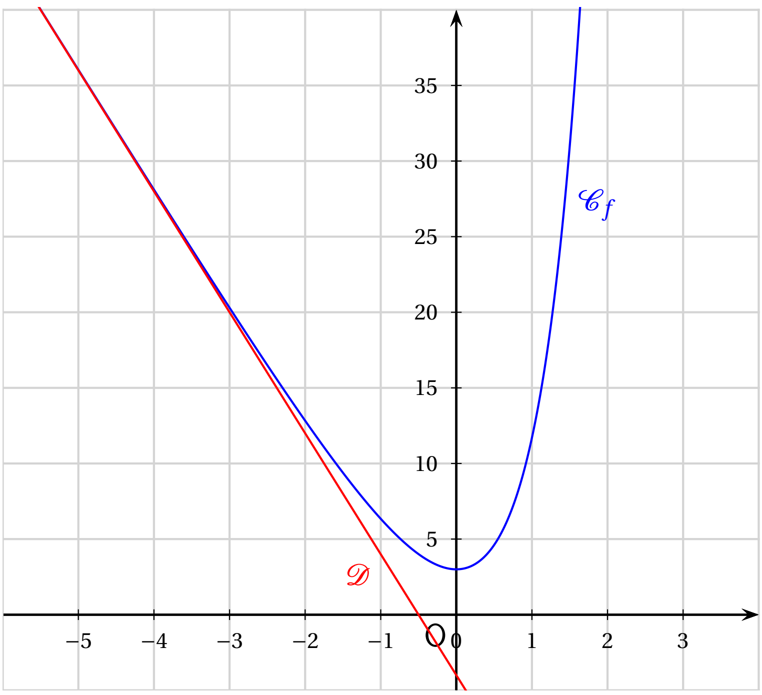
5. La courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ ont un point commun si et seulement si l'équation $f(x) = -8x - 4$ admet une solution.

   On résout cette équation :

   $f(x) = -8x - 4 \iff \mathrm{e}^{2x} + 6\mathrm{e}^{x} - 8x - 4 = -8x - 4 \iff \mathrm{e}^{2x} + 6\mathrm{e}^{x} = 0 \iff \mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x} + 6\right) = 0$

   Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x} > 0$ donc le produit $\mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x} + 6\right)$ n'est jamais nul.

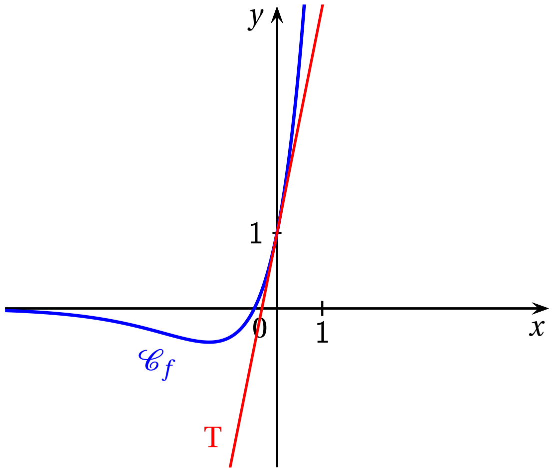
   L'équation n'a donc pas de solution, ce qui veut dire que la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ n'ont pas de point commun.



Exercice 3.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)\,e^x$.

Sur le graphique ci-dessous, sont tracées la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f, et la droite T, tangente à cette courbe au point d'abscisse 0.



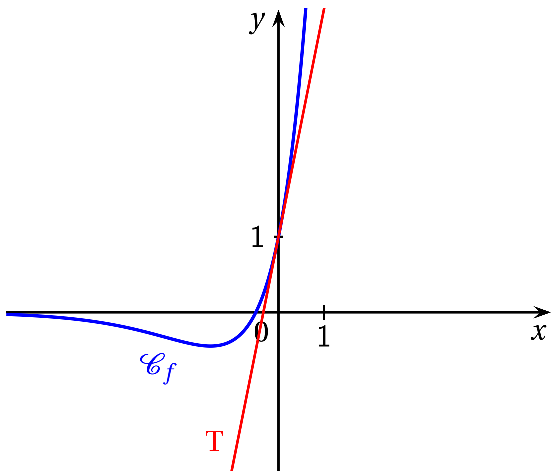
1. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec laxe des abscisses.
2. Montrer que, pour tout x réel, que $f'(x) = (2x+3)\,e^x$.
3. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis préciser les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. (a) Déterminer l'équation réduite de la tangente T.

   (b) Justifier graphiquement que, pour tout réel x, on a : $(2x+1)\,e^x \geqslant 3x+1$.

Correction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)\,e^x$.

Sur le graphique ci-dessous, sont tracées la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f, et la droite T, tangente à cette courbe au point d'abscisse 0.



1. Les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses ont pour ordonnées 0 et pour abscisses les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f(x) = 0 \iff 2x+1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$.

Le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$.

2. On utilise la formule de dérivation d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$.

   Pour tout x réel, $f'(x) = 2 \times \mathrm{e}^x + (2x+1) \times \mathrm{e}^x = (2+2x+1)\,\mathrm{e}^x = (2x+3)\,\mathrm{e}^x$.

3. On dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis on va préciser les variations de f sur $\mathbb{R}$.

   Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2x+3$ qui s'annule et change de signe pour $x = -\frac{3}{2}$.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
		f est décroissante		f est croissante	

4. (a) La tangente T au point de la courbe d'abscisse 0 a pour équation : $y = f(0) + f'(0)(x-0)$.

   $f(x) = (2x+1)\,\mathrm{e}^x$ donc $f(0) = 1$, et $f'(x) = (2x+3)\,\mathrm{e}^x$ donc $f'(0) = 3$.

   L'équation réduite de la tangente T est donc : $y = 3x+1$.

   (b) D'après le graphique, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au dessus de la tangente T, sauf en leur point d'intersection de coordonnées $(0\ ;\ 1)$.

   La courbe $\mathscr{C}_f$ a pour équation $y = (2x+1)\,\mathrm{e}^x$ et la tangente T a pour équation $y = 3x+1$.

   Donc, pour tout réel x, on a : $(2x+1)\,\mathrm{e}^x \geqslant 3x+1$.

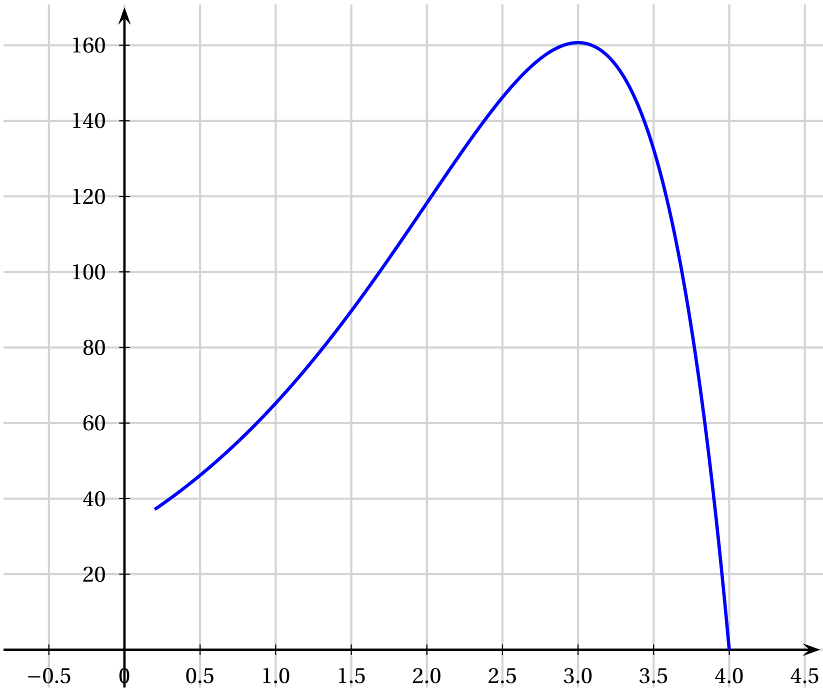
Exercice 4.

Un rameur est une machine d'exercice physique simulant les mouvements d'une personne qui fait de l'aviron. Il est souvent utilisé pour l'entraînement sportif afin d'améliorer sa condition physique.

La courbe ci-dessous représente la puissance (en Watt) en fonction du temps (en dixième de seconde) développée par un rameur débutant.

Partie A : Répondre par lecture graphique aux deux questions suivantes

1. Quelle est la puissance maximale atteinte par ce rameur ?
2. Pendant combien de temps la puissance développée reste-t-elle au-dessus de 100 Watts ?



Partie B : Modélisation par une fonction

On suppose que la courbe est la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0,2\ ;\ 4]$ par :

$$f(x) = (-8x+32)\,\mathrm{e}^{x}.$$

On note f' la fonction dérivée de f. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0,2\ ;\ 4]$,

$$f'(x) = (-8x+24)\,\mathrm{e}^{x}.$$

1. Étudier le signe de $f'(x)$ puis en déduire les variations de f sur $[0,2\ ;\ 4]$.
2. Déterminer la valeur exacte du maximum de la fonction f.

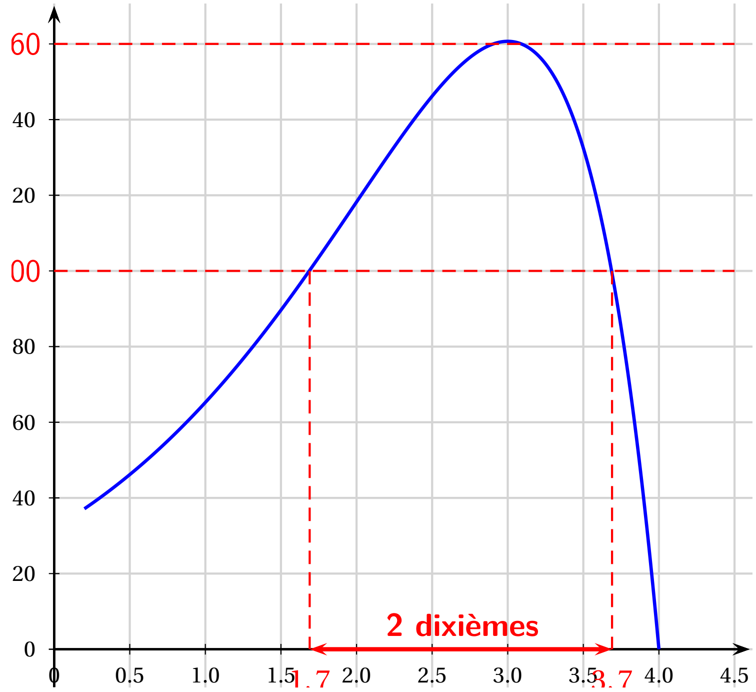
   On suppose que le sportif améliore sa meilleure performance de 5 % tous les mois. Combien de mois d'entrainement seront-ils nécessaires pour qu'il dépasse les 200 W ?

Correction

Un rameur est une machine d'exercice physique simulant les mouvements d'une personne qui fait de l'aviron. Il est souvent utilisé pour l'entraînement sportif afin d'améliorer sa condition physique. La courbe ci-dessous représente la puissance (en Watt) en fonction du temps (en dixième de seconde) développée par un rameur débutant.

Partie A : lecture graphique

1. La puissance maximale atteinte par ce rameur est d'environ 160 Watts.
2. La puissance développée reste au-dessus de 100 Watts entre environ $1,7$ et $3,7$ dixièmes de seconde, soit pendant 2 dixièmes de seconde.



Partie B : Modélisation par une fonction

On suppose que la courbe est la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0,2\ ;\ 4]$ par : $f(x) = (-8x+32)\,\mathrm{e}^{x}$.

On note f' la fonction dérivée de f.

On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0,2\ ;\ 4]$, $f'(x) = (-8x+24)\,\mathrm{e}^{x}$.

1. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(-8x+24)$ qui s'annule et change de signe pour $x = 3$.

x	$0,2$		3		4
$-8x+24$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
		f est croissante		f est décroissante	

2. Le maximum de la fonction f est $f(3) = (-8 \times 3 + 32)\,\mathrm{e}^3 = 8\,\mathrm{e}^3$.

   On suppose que le sportif améliore sa meilleure performance de 5 % tous les mois. On cherche combien de mois d'entrainement sont nécessaires pour qu'il dépasse les 200 W.

   Ajouter 5 %, c'est multiplier par $1 + \dfrac{5}{100} = 1{,}05$. il faut donc compter le nombre de fois qu'il faut multiplier $8\,\mathrm{e}^3$ par $1{,}05$ pour que le résultat dépasse 200.

   $8\,\mathrm{e}^3 \times 1{,}05^4 \approx 195{,}3 < 200$ et $8\,\mathrm{e}^3 \times 1{,}05^5 \approx 205{,}1 > 200$

   Il faudra donc 5 mois d'entraînement pour que le sportif dépasse les 200 W.

Exercice 5.

Soit h la fonction définie sur $[0\,;\,26]$ par $h(x) = -x^3 + 30x^2 - 108x - 490$.

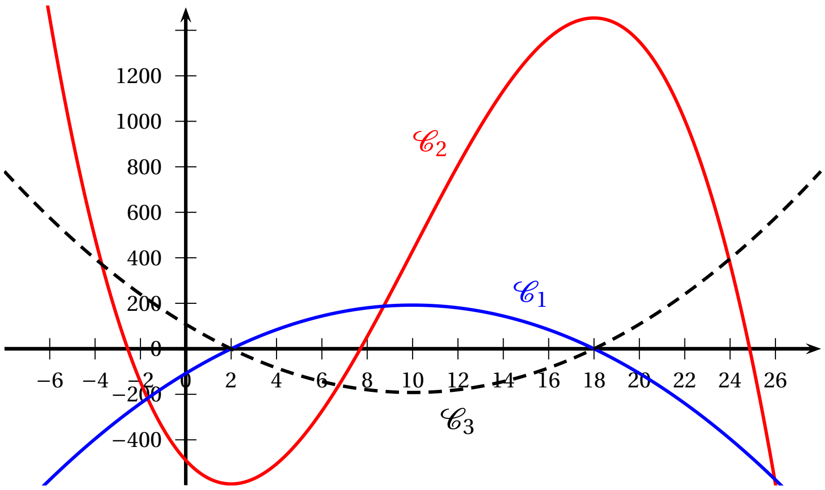
1. Soit h' la fonction dérivée de h.

   Exprimer $h'(x)$ en fonction de x.

2. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de h et $\mathscr{C}'$ celle de h'.

   (a) Identifier $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sur le graphique orthogonal ci-dessous parmi les trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ proposées.

   (b) Justifier le choix pour $\mathscr{C}'$.



3. Soit (T) la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0. Déterminer son équation réduite.

4. Étudier le signe de $h'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction h sur $[0\,;\,26]$.

Correction

Soit h la fonction définie sur $[0\,;\,26]$ par $h(x) = -x^3 + 30x^2 - 108x - 490$.

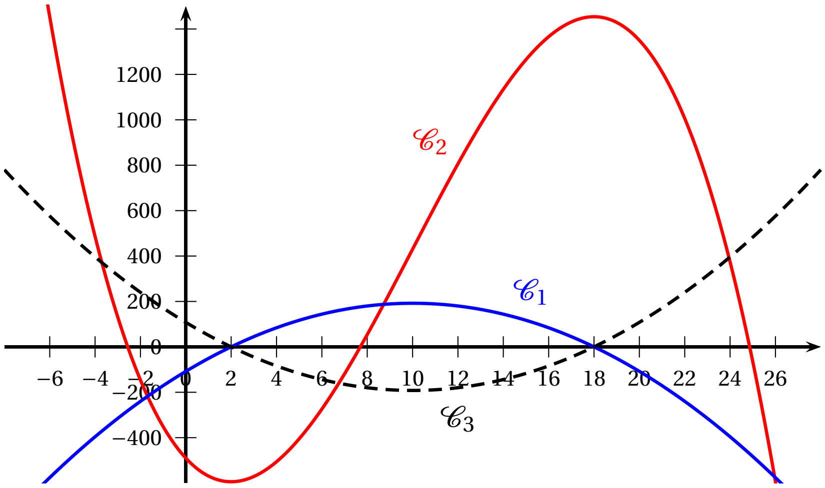
1. $h'(x) = -3x^2 + 30 \times 2x - 108 = -3x^2 + 60x - 108$

2. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de h et $\mathscr{C}'$ celle de h'.

   (a) La courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction h est la courbe $\mathscr{C}_2$.

   La courbe $\mathscr{C}'$ représentant la fonction h' est la courbe $\mathscr{C}_1$.

   (b) $h(0) = -490$ donc la courbe $\mathscr{C}_2$ représente la fonction h ; on peut donc voir que la fonction h est décroissante, puis croissante, puis décroissante. La fonction dérivée h' sera donc négative, puis positive, puis négative. Elle est donc représentée par la courbe $\mathscr{C}_1$.



3. Soit (T) la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0.

   La droite (T) a pour équation réduite : $y = h'(0)(x-0) + h(0)$.

   $h(0) = -490$ et $h'(0) = -108$

   La droite (T) a donc pour équation réduite : $y = -108x - 490$.

4. $h'(x) = -3x^2 + 60x - 108$ est un polynôme de degré 2 dont le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = 60^2 - 4 \times (-3) \times (-108) = 2304 = 48^2$

   Ce polynôme admet donc deux racines :
   $x' = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-60+48}{-6} = 2$ et $x'' = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-60-48}{-6} = 18$
   On en déduit le signe de $h'(x)$ puis le sens de variation de h.

   $h(0) = -490,\ h(2) = -594,\ h(18) = 1454$ et $h(26) = -594$

x	0		2		18		26
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	-490 ↘		-594 ↗		$1\,454$ ↘		-594