Elements de correction des exercices : Fonction exponentielle

I Calculs algébriques

Exercice 1. Simplifier les expressions suivantes :

1. e^3e^4
2. $\dfrac{e^5e^{-3}}{e^{-2}}$
3. $\left(e^4\right)^3e^4$
4. $\dfrac{e-\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}$
5. $\left(e^2+e^{-2}\right)\left(e^2-e^{-2}\right)$
6. $\sqrt{(e^2+1)^2-(e^2-1)^2}$

Correction

1. e^7
2. e^4
3. e^{16}
4. $\sqrt{e}$
5. e^4-e^{-4}
6. $2e$

Exercice 2. Simplifier les expressions suivantes :

1. e^xe^{-x}
2. ee^{-x}
3. $e^x\left(e^x+e^{-x}\right)$
4. $\sqrt{e^{-2x}}$
5. $\left(e^{5x}\right)^2$
6. $e^{9x}-2\left(e^{3x}\right)^3$

Correction

1. 1
2. e^{1-x}
3. $e^{2x}+1$
4. e^{-x}
5. e^{10x}
6. $-e^{9x}$

II Équations - Inéquations

Exercice 3. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $\exp(x)=e$
2. $\exp(-x)=1$
3. $e^{x^2+x}=1$
4. $e^x-e^{-x}=0$
5. $e^x+e^{-x}=0$
6. $e^{3x+1}=e^{-2x+3}$

Correction

1. $\{1\}$
2. $\{0\}$
3. $\{-1;0\}$
4. $\{0\}$
5. $\varnothing$
6. $\{2/5\}$

Exercice 4. Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $e^{2x-1} > e^x$
2. $e^x < 1$
3. $e^{-x} > 0$
4. $e^x - e^{-x} > 0$
5. $e^{2x} - 1 \geqslant 0$
6. $xe^{-x} - 3e^{-x} < 0$

Correction

1. $]1\ ;\ +\infty[$
2. $]-\infty\ ;\ 0[$
3. $\mathbb{R}$
4. $]0\ ;\ +\infty[$
5. $[0\ ;\ +\infty[$
6. $]-\infty\ ;\ 3[$

Exercice 5.

1. Déterminer les racines du polynôme : $\mathrm{P(X)} = \mathrm{X}^2 + 4\mathrm{X} - 5$.
2. En déduire les solutions de l'équation $e^{2x} + 4e^x = 5$.
3. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $e^{2x} + e^x - 2 = 0$
   (b) $e^{2x+1} + e^{x+1} - 2e = 0$
   (c) $e^x - 2e^{-x} + 1 = 0$

Correction

1. Deux racines : -5 et 1.
2. $e^{2x} + 4e^x = 5 \Leftrightarrow \left(e^x + 5\right)\left(e^x - 1\right) = 0$.
   Seule le second facteur peut être nul. $\mathscr{S} = \{0\}$.
3. (a) $e^{2x} + e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(e^x + 2\right)\left(e^x - 1\right)$. Cette équations n'a qu'une solution : 0.
   (b) Équation équivalente (on divise par e).
   (c) Équation équivalente (on multiplie par e^x).

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{R}$.

1. $e^{x^2+2} = \dfrac{e^{2x}}{e}$
2. $2e^{2x} + 5e^x + 3 = 0$
3. $e^{x^2} + 1 \leqslant 2$

Correction

1. $\{1\}$
2. $\varnothing$
3. $\{0\}$

III Dérivées

Exercice 7. Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la donnée de $f(x)$. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer une expression de $f'(x)$.

1. $f(x) = e^{-x}$
2. $f(x) = e^{x^2+x}$
3. $f(x) = xe^{x+1}$
4. $f(x) = e^{x^2+1}$
5. $f(x) = \left(x^2+1\right)e^{3x+1}$
6. $f(x) = \dfrac{1-e^{-2x}}{e^x}$

Correction

1. $f'(x) = -e^{-x}$
2. $f'(x) = (2x+1)e^{x^2+x}$
3. $f'(x) = (x+1)e^{x+1}$
4. $f'(x) = 2xe^{x^2+1}$
5. $f'(x)=\left(3x^2+2x+3\right)e^{3x+1}$
6. $f'(x) = \dfrac{3-e^{2x}}{e^{3x}}$

Exercice 8. Utilisation d'une fonction auxiliaire

1. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $g : x \mapsto x^2\mathrm{e}^x - 1$.
   (a) Déterminer une expression de la dérivée de g.
   (b) Donner le tableau de signes de cette dérivée sur $\mathbb{R}$.
   (c) En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
   (d) Donner, à l'aide d'un tableau de valeurs, une valeur approchée à 0,1 près de la solution de léquation $g(x) = 0$.
   (e) En déduire le tableau de signes de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   (a) Expliquer pourquoi la fonction f nest pas définie en 0.
   (b) Déterminer une expression de la dérivée de f.
   (c) Donner le tableau de signes de cette dérivée sur $\mathbb{R}^*$.
   (d) En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

Correction

1. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $g : x \mapsto x^2\mathrm{e}^x - 1$.
   (a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence d'un produit de fonctions déribales sur $\mathbb{R}$ et d'un entier.
   On a $g = u \times v - 1$ alors $g' = u'v + uv' - 0$
   avec $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$

D'où $g'(x) = x^2 e^x + 2x e^x = \left(x^2 + 2x\right) e^x = x(x+2)e^x$.

Donc $\boxed{g'(x) = x(x+2)e^x}$

(b) Comme $g'(x) = x(x+2)e^x$, on en déduit son signe sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x		$-$		$+$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$-$		$+$	
e^x		$+$		$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(c) D'après le tableau de signe précédent, on en déduit le tableau de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variation de g		$\nearrow$	$4e^{-2}-1$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

(d) D'après le tableau de valeurs, on trouve que $g(x) = 0$ a une seule solution α

et à la calculatrice : $g(0,7) \approx -0,01326$ et $g(0,8) \approx 0,4243$

Donc $\boxed{\alpha \approx 0,7}$.

(e) On en déduit le signe de $g(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de g		$-$	0	$+$	

2. On considère la fonction $f : x \mapsto e^x + \dfrac{1}{x}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

(a) f n'est pas définie en 0 car $\dfrac{1}{x}$ n'est pas défini en 0.

(b) On a $f(x) = e^x + \dfrac{1}{x}$

Alors la fonction f est dériable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}^*$

D'où $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2e^x - 1}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

Donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}}$

(c) On sait que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

Comme pour tout $xin\mathbb{R}^*$, $x^2 > 0$

Alors $f'(x)$ est du signe de $g(x)$

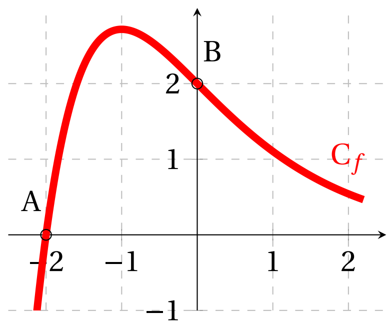
D'où

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

(d) D'après le tableau de signe précédent, on en déduit le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
Variation de f		$\searrow$	$\|$	$\searrow$	$e^{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha}$	$\nearrow$	

Exercice 9. Une courbe $\mathscr{C}$ qui passe par les points $A(-2\ ;\ 0)$ et $B(0\ ;\ 2)$ représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (ax+b)e^{-x}$ où a et b sont des réels.



1. À l'aide du graphique, déterminer a et b en justifiant.
2. En déduire le tableau de variation de f.

Correction

1. D'après les coordonnées des points A et B, on obtient :

   - $f(0) = 2 \iff (a \times 0 + b)e^{-0} = 2 \iff b = 2$ donc $b = 2$
   - $f(-2) = 0 \iff (a \times (-2) + 2)e^{+2} = 0 \iff -2a + 2 = 0 \iff a = 1$

   Donc $\boxed{f(x) = (x+2)e^{-x}}$

2. On a $f(x) = (x+2)e^{-x}$

   Alors fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions déribales sur $\mathbb{R}$

   On a $\quad f = u \times v \quad$ alors $\quad f' = u'v + uv'$

   avec $\quad u(x) = x+2 \quad$ et $\quad u'(x) = 1 \quad$ et $\quad v(x) = e^{-x} \quad$ et $\quad v'(x) = -e^{-x}$

   D'où $f'(x) = e^{-x} + (x+2)(-e^{-x}) = (1-x-2)e^{-x} = -(1+x)e^{x}$.

   Donc $\boxed{f'(x) = (-1-x)e^{-x}}$

   Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$

   Alors $f'(x)$ est du signe de $-1-x$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	e	$\searrow$	